LEHRBRIEFE FÜR DAS HOCHSCHULFERNSTUDIUM

HERAUSGEGEBEN
VON DER ZENTRALSTELLE FÜR DAS HOCHSCHULFERNSTUDIUM
DES MINISTERIUMS FÜR HOCH- UND FACHSCHULWESEN

Lineare Algebra

4. LEHRBRIEF

Eigenwertprobleme quadratischer Matrizen

02 1013 04 0

Lineare Algebra

4. Lehrbrief

Eigenwertprobleme quadratischer Matrizen

Verfaßt von
Dr.-Ing. Ralf K u h r t
Humboldt-Universität zu Berlin
Sektion Mathematik

02 1013 04 0

Redaktionsschluß: Juli 1988

Druck und buchbinderische Verarbeitung:
ZENTRALSTELLE FÜR LEHR- UND ORGANISATIONSMITTEL DES MINISTERIUMS FÜR HOCH- UND FACHSCHULWESEN, ZWICKAU
Ag 628/376/89/DDR/5300 - ZLO 811/89

1. Ausgabe 1. Auflage

Bestell-Nr. 02 1013 04 0

Verfaßt für die Zentralstelle für das Hochschulfernstudium des Ministeriums für Hoch- und Fachschulwesen Dresden.

Herausgegeben im Auftrag des Ministeriums für Hoch- und Fachschulwesen der Deutschen Demokratischen Republik von der Zentralstelle für das Hochschulfernstudium Dresden.

Inhaltsverzeichnis

		Seite
6.	Eigenwertprobleme quadratischer Matrizen	4
6.1.	Vorbemerkungen	4
6.2.	Einführung in die Eigenwertprobleme	8
6.3.	Berechnung der Eigenwerte einer quadratischen Matrix	13
6.4.	Eine Eigenwertaufgabe bei zeitdiskreten Systemen	19
6.5.	Berechnung der Eigenvektoren einer quadratischen Matrix	24
6.5.1.	Eigenvektoren bei einfachen Eigenwerten	24
6.5.2.	Eigenvektoren bei mehrfachen Eigenwerten	29
6.6.	Ähnlichkeitstransformation von Matrizen	33
6.6.1.	Vektortransformation (Vorbemerkung)	33
6.6.2.	Ähnlichkeitstransformation	34
6.6.3.	Hauptachsentransformation diagonalähnlicher Matrizen	39
6.6.4.	Unitäre bzw. orthogonale Hauptachsentransformation	45
6.7.	Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren	54
Lösungen		60
Literaturverzeichnis siehe Lehrbrief 1		

6. Eigenwertprobleme quadratischer Matrizen

6.1. Vorbemerkungen

Dieser vierte Lehrbrief aus der Lehrbriefreihe "Lineare Algebra" soll mit den Eigenwertproblemen quadratischer Matrizen vertraut machen. In gewissen Zusammenhängen, die noch erläutert werden, läßt sich eine Matrix durch bestimmte Zahlen ersetzen, welche die Eigenwerte der Matrix genannt werden. Diese Eigenwerte ergeben sich im Zusammenhang mit der Lösung homogener Gleichungssysteme, deren nichttriviale Lösungen, in Vektorform angegeben, als Eigenvektoren der Matrix bezeichnet werden. Für das Verständnis dieser und der hieran anschließenden Probleme ist eine gut fundierte Kenntnis über

- das Aufsuchen und die Bedingungen der Existenz nichttrivialer Lösungen homogener Gleichungssysteme (Abschnitte 3.5.1. bis 3.5.3., 2. Lehrbrief) und
- die Beziehungen zwischen dem Rang r einer Matrix (Abschnitt 2.8., 1. Lehrbrief), der Anzahl k der (linear unabhängigen) Fundamentallösungen und der Dimension n der Vektoren (Anzahl der Variablen) (Satz 3.2 im Abschnitt 3.4., 2. Lehrbrief)

unbedingt erforderlich. Selbstverständlich wird die Kenntnis

- der Matrizenmultiplikation (Abschnitt 2.3., 1. Lehrbrief),
- der inversen, der symmetrischen, der orthogonalen und der hermiteschen Matrix (Abschnitte 2.6., 2.7., 1. Lehrbrief) und
- der Orthogonalität von Vektoren mit den zugehörigen Bedingungen (Abschnitt 4.4.1., 3. Lehrbrief)

benötigt.
Schließlich ist auch Vertrautsein im Umgang mit komplexen Zahlen erforderlich. Insbesondere die Bildung des Betragsquadrates durch Multiplikation einer komplexen Zahl z mit ihrer konjugiert Komplexen $\overline{z}$ nach der Gleichung

$$z\,\overline{z} = \overline{z}\,z = |z|^2 \qquad (6.1)$$

sollte sicher beherrscht werden.
In diesem Zusammenhang muß noch über einige Eigenschaften komplexer Vektoren und Matrizen informiert werden, da deren Kenntnis für die Eigenwerttheorie benötigt wird.
Außer den im 3. Lehrbrief behandelten Vektoren mit reellen Kom-

ponenten sind für gewisse Probleme der Praxis auch Vektoren mit imaginären oder komplexen Komponenten von großer Bedeutung, also etwa solche Vektoren wie

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ j \end{bmatrix}; \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 - j \\ j \\ -2 \end{bmatrix}. \tag{6.2}$$

Dabei definiert $j^2 = -1$ die imaginäre Einheit j. Die Rechenregeln und Bedingungen für die Addition und Subtraktion von Vektoren sowie die Multiplikation von Vektoren mit Zahlen entsprechen unter Beachtung von $j^2 = -1$ im Falle komplexer Vektoren völlig denen für reelle Vektoren (Abschnitt 4.2.2., 3. Lehrbrief). Desgleichen lassen sich die Aussagen über die Komponentenzerlegung (Abschnitt 4.3.2., 3. Lehrbrief) und die Bedingungen für die lineare Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit von Vektoren (Definition 3.5 und Beispiel 3.19, 2. Lehrbrief, sowie Definition 4.8, 3. Lehrbrief) aus der Algebra reeller Vektoren auf komplexe Vektoren übertragen.

Lediglich die Berechnung des Betrages und im Gefolge dessen die Definition des Skalarproduktes erfahren bei den komplexen Vektoren eine Abänderung.

Der Betrag eines reellen Vektors war entsprechend den Gleichungen (4.28) bis (4.29), 3. Lehrbrief, durch die Quadrate der Komponenten gegeben. Allgemeiner kann Gleichung (4.29) auch in der Form

$$a = |\underline{a}| = \left(\sum_{i=1}^{m} |a_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

geschrieben werden. Beachtet man noch die Gleichungen (4.49) und (4.50), 3. Lehrbrief, so gilt folgende Gleichungskette für reelle Vektoren:

$$a = |\underline{a}| = \sqrt{\underline{a}^T \cdot \underline{a}} = \sqrt{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} |a_i|^2}. \tag{6.3}$$

Der letzte Ausdruck in Gleichung (6.3) ist offenbar auch geeignet, den Betrag eines Vektors mit komplexen Komponenten a_i darzu-

stellen. Sind die Komponenten a_i komplex, so ist zur Berechnung ihres Betragsquadrates Gleichung (6.1) heranzuziehen.
An Stelle von Gleichung (6.3) ist für komplexe Vektoren deshalb offensichtlich folgende Berechnungsformel für Beträge anzugeben:

$$|\underline{a}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} |a_i|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \overline{a}_i\, a_i} = \sqrt{\begin{bmatrix}\overline{a}_1 & \overline{a}_2 & \dots & \overline{a}_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_m\end{bmatrix}} = \sqrt{\overline{\underline{a}}^T \cdot \underline{a}}\,.$$

Dabei bedeutet $\overline{\underline{a}}^T$ einen transponierten Vektor (Zeilenvektor) mit konjugiert komplexen Elementen $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \dots, \overline{a}_m$, verglichen mit den komplexen Elementen $a_1, a_2, \dots, a_m$ des Vektors $\underline{a}$.
Eine Matrix, die aus einem gegebenen Vektor $\underline{a}$ durch Transponieren und Übergang zu konjugiert komplexen Elementen hervorgeht, nennen wir gemäß Definition 2.18, 1. Lehrbrief, zu $\underline{a}$ adjungiert (assoziiert) und bezeichnen sie mit $\underline{a}^*$.

Den Betrag eines komplexen Vektors berechnet man daher nach

$$|\underline{a}| = \sqrt{\underline{a}^* \cdot \underline{a}}\,. \qquad (6.4)$$

Für die in Gleichung (6.2) genannten Vektoren ergeben sich also die Beträge zu

$$|\underline{a}| = \sqrt{\underline{a}^* \cdot \underline{a}} = \sqrt{\begin{bmatrix}1 & 0 & -j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\\ j\end{bmatrix}} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}\,,$$

$$|\underline{b}| = \sqrt{\underline{b}^* \cdot \underline{b}} = \sqrt{\begin{bmatrix}1+j & -j & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1-j\\ j\\ -2\end{bmatrix}} = \sqrt{2+1+4} = \sqrt{7}.$$

Bemerkung 6.1: Die Gleichung (6.3) zur Berechnung des Betrages reeller Vektoren ist in der für komplexe Vektoren (6.4) enthalten, da für reelle Vektoren $\underline{a}^* = \underline{a}^T$ gilt.
Da nach Gleichung (4.49), 3. Lehrbrief, Betragsberechnung und Skalarprodukt unmittelbar zusammengehören, ergibt sich auf Grund von Gleichung (6.4) die

Definition 6.1: Das Skalarprodukt des komplexen Vektors $\underline{a}$ der

Dimension m mit dem komplexen Vektor $\underline{b}$ der gleichen Dimension,

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}; \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

ist gegeben durch

$$\underline{a}^* \cdot \underline{b} = \begin{bmatrix} \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \dots & \bar{a}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{m} (\bar{a}_i \, b_i) \, . \qquad (6.5)$$

Mit den in Gleichung (6.2) angeführten Vektoren ergibt sich z. B.

$$\underline{a}^* \cdot \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - j \\ j \\ -2 \end{bmatrix} = 1 - j + 2\,j = 1 + j,$$

$$\underline{b}^* \cdot \underline{a} = \begin{bmatrix} 1 + j & -j & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ j \end{bmatrix} = 1 + j - 2\,j = 1 - j.$$

Bemerkung 6.2: Die beiden letzten Berechnungen lassen ohne Schwierigkeiten erkennen, daß das Skalarprodukt für komplexe Vektoren im allgemeinen nicht kommutativ ist, vielmehr gilt hier: $\underline{a}^* \cdot \underline{b} = \underline{b}^* \cdot \underline{a}^*$. Dies ist aus den Ergebnissen ersichtlich und entspricht vor allem auch der Gleichung (2.49) im 1. Lehrbrief.
Dem Begriff der Orthogonalität zweier reeller Vektoren entspricht für die komplexen Vektoren der Begriff der Unitarität:

Definition 6.2: Zwei komplexe, nicht mit dem Nullvektor identische Vektoren heißen unitär (auch unitär orthogonal), wenn ihr Skalarprodukt den Wert Null ergibt:

$$\underline{a} \text{ und } \underline{b} \text{ unitär} \iff \underline{a}^* \cdot \underline{b} = \underline{b}^* \cdot \underline{a} = 0 \qquad (6.6)$$

(vgl. Satz 4.11, 3. Lehrbrief).
So sind beispielsweise die beiden Vektoren

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ j \end{bmatrix}; \quad \underline{c} = \begin{bmatrix} j \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

unitär orthogonal zueinander, denn es gilt

$$\underline{a}^* \cdot \underline{c} = [1 \quad 0 \quad -j] \begin{bmatrix} j \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = j - j = 0.$$

Bemerkung 6.3: Eine reelle quadratische Matrix, deren Spalten aus orthogonalen normierten Vektoren bestehen, bezeichneten wir entsprechend Definition 2.17, 1. Lehrbrief, als orthogonal. Ebenso ist entsprechend Definition 2.20, 1. Lehrbrief, eine komplexe Matrix als unitär orthogonal zu bezeichnen, wenn deren Spalten aus zueinander unitär orthogonalen, normierten komplexen Vektoren bestehen.

* Aufgabe 6.1: Berechnen Sie die Beträge der folgenden Vektoren, und geben Sie die zugehörigen Einheitsvektoren an!

a) $\underline{a} = [j \quad 0 \quad 0]^T$; b) $\underline{b} = [1 + j \quad 1 - j \quad 0]^T$;

c) $\underline{c} = \begin{bmatrix} j \\ j \\ j \end{bmatrix}$; d) $\underline{d} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ j \end{bmatrix}$.

* Aufgabe 6.2: Bilden Sie von den nachfolgend gegebenen Vektorpaaren die beiden Skalarprodukte, falls dies möglich ist!

a) $\underline{a} = [j \quad 1 \quad 0]^T$; $\underline{b} = [-1 \quad j \quad 0]^T$;

b) $\underline{a} = [j \quad 1 \quad 0]^T$; $\underline{c} = [1 \quad j \quad 1]^T$;

c) $\underline{d} = [1 - j \quad -2j \quad 2 + j]^T$; $\underline{e} = \begin{bmatrix} 2j \\ j \\ 2 \end{bmatrix}$;

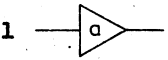
d) $\underline{f} = \begin{bmatrix} 2 \\ \\ j \end{bmatrix}$; $\underline{g} = [j \quad -1 \quad 0]^T$.

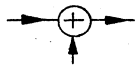
6.2. Einführung in die Eigenwertprobleme

Die Eigenwertproblematik sei zunächst durch folgende Fragestellung illustriert:

Beispiel 6.1: Es ist das System nach Bild 6.1 gegeben, welches die drei Eingangsgrößen x_1, x_2, x_3 jeweils mit unterschiedlichen

Faktoren (linear) verstärkt, danach miteinander additiv verknüpft (insgesamt also linear kombiniert) und die so entstehenden Ergebnisse als Ausgangsgrößen y_1, y_2, y_3 liefert.

Dabei wird die Verstärkung a durch das Symbol 

und die Addition durch das Symbol  dargestellt.

Derartige Fragestellungen sind durchaus nicht nur in der Elektrotechnik, sondern auch für das Maschineningenieurwesen und die Informationsverarbeitung relevant.

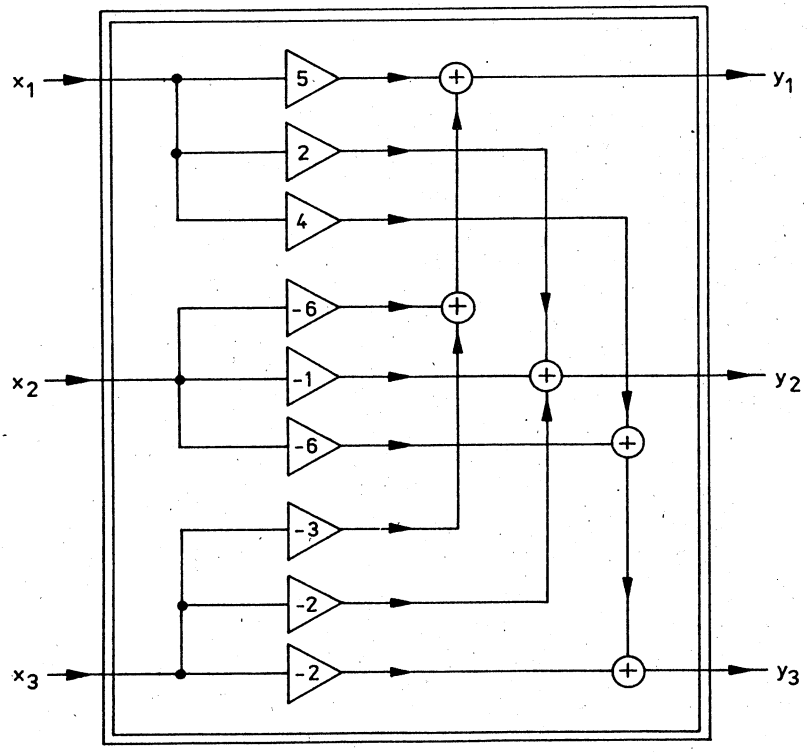


Bild 6.1

Verfolgt man anhand des Bildes 6.1, wie sich y_1 bzw. y_2 oder y_3 aus den Eingängen x_1, x_2 und x_3 zusammensetzt, so erkennt man:

$$y_1 = 5\,x_1 - 6\,x_2 - 3\,x_3$$
$$y_2 = 2\,x_1 - \;\;x_2 - 2\,x_3 \qquad (6.7)$$
$$y_3 = 4\,x_1 - 6\,x_2 - 2\,x_3\ .$$

In Matrizenschreibweise erhält man

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 4 & -6 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \qquad (6.8)$$

d. h.,

$$\underline{y} = \underline{A} \cdot \underline{x}\ . \qquad (6.9)$$

Dabei werden x_1, x_2, x_3 zu einem Eingangsvektor $\underline{x}$, y_1, y_2, y_3 zu einem Ausgangsvektor $\underline{y}$ und die Verstärkungsfaktoren zu einer Matrix $\underline{A}$ zusammengefaßt. Die das System charakterisierende Matrix $\underline{A}$ wird in diesem Zusammenhang auch Operator genannt, eine Größe, die aus dem Eingang $\underline{x}$ den Ausgang $\underline{y}$ herstellt (operieren (aus dem Lateinischen) - eingreifen)).
Je nach der Eingangsgröße $\underline{x} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T$ ergibt sich ein Ausgangsvektor $\underline{y} = [y_1 \quad y_2 \quad y_3]^T$. Es gibt nun ganz bestimmte Eingangsvarianten $[x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T$, die sogenannten <u>Eigenvektoren</u> der Matrix, für welche die Ausgangsgrößen gerade das λ-fache der Eingangsgrößen darstellen, d. h.,

$$\underline{y} = \lambda\,\underline{x} \quad \text{bzw.} \quad \begin{aligned} y_1 &= \lambda\,x_1, \\ y_2 &= \lambda\,x_2, \\ y_3 &= \lambda\,x_3\ . \end{aligned} \qquad (6.10)$$

Für die Eigenvektoren (aber <u>nur</u> für diese!) läßt sich das System Bild 6.1 in ein vereinfachtes Ersatzsystem überführen (Bild 6.2).

Die λ-Werte ("Verstärkungsfaktoren") werden als <u>Eigenwerte der Matrix</u> bezeichnet. Für die Eigenvektoren $\underline{x}$ gilt also mit den Gleichungen (6.9) und (6.10)

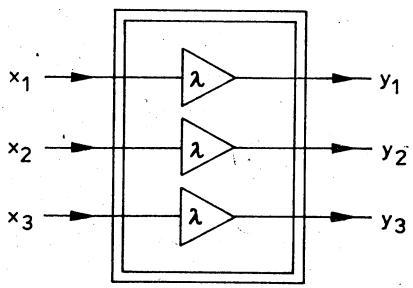


Bild 6.2

$$\underline{A} \cdot \underline{x} = \lambda \underline{x} \qquad (\underline{x} \neq \underline{o}) \,, \qquad \Longleftrightarrow \tag{6.11}$$

$$\left.\begin{array}{l} \underline{A} \cdot \underline{x} = \lambda \underline{E} \cdot \underline{x} \,, \\ (\underline{A} - \lambda \underline{E}) \cdot \underline{x} = \underline{o}. \end{array}\right\} \qquad \Longleftrightarrow \tag{6.12}$$

In der zweiten Gleichung ist die Beziehung $\underline{x} = \underline{E} \cdot \underline{x}$ verwendet worden.

Die Beziehung (6.12), die charakteristische Gleichung, ist ein homogenes Gleichungssystem für die Variablen x_1, x_2, x_3 mit der Koeffizientenmatrix $\underline{A} - \lambda \underline{E}$. Die nichttrivialen Lösungen dieses Gleichungssystems sind die Eigenvektoren der Matrix $\underline{A}$.

Beispiel 6.2: Für die Matrix $\underline{A}$ aus den Gleichungen (6.7) bis (6.9) ergibt sich nach Einsetzen in die Gleichung (6.12) das Eigenwertproblem

$$\left(\begin{bmatrix} 5 & -6 & -3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 4 & -6 & -2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \underline{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 5 - \lambda & -6 & -3 \\ 2 & -1 - \lambda & -2 \\ 4 & -6 & -2 - \lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{6.13}$$

Bemerkung 6.4: In Gleichung (6.9) stellt entsprechend Bild 6.1 die Matrix $\underline{A}$ einen Operator dar, der den Eingang $\underline{x}$ eines Systems in den Ausgang $\underline{y}$ überführt. In der Praxis sind die Fragestellungen jedoch etwas verwickelter. Insbesondere bei Verwendung von Speichern im System empfiehlt es sich, zunächst die Eingangsgrößen x_i in die sogenannten Zustandsgrößen z_r des Systems zu transformieren und dann die Ausgangsgrößen y_k als Übersetzung der Zustandsgrößen in den Ausgang zu interpretieren. Die Zustandsgrößen ergeben sich aus einem Differenzen- bzw. Differentialgleichungssystem, in welchem eine Matrix $\underline{A}$ enthalten ist. Deren Eigenwerte und Eigenvektoren sind wiederum charakteristisch für das betreffende System.

Solche Systeme mit Speichern können z. B. mechanische Systeme aus Federn (mit den Federkonstanten k_i) und Massen (m_r) bzw. elektrotechnische Systeme, bestehend aus Induktivitäten (L_i) und Kapazitäten (C_r) sein. Ein digitales System als weiteres Beispiel wird in Abschnitt 6.4. beschrieben.

In den Formeln (6.8), (6.9) und (6.12), (6.13), die Ausdruck des Systems Bild 6.1 sind, steht der Eingangsvektor $\underline{x}$ (der Vektor der Eingangssignale) rechts von der Matrix $\underline{A}$. Das Problem der Berechnung der zugehörigen Eigenwerte und der entsprechenden Eigenvektoren wird deshalb als rechtsseitiges Eigenwertproblem bezeichnet. Andere Betrachtungen können auf linksseitige Eigenwertprobleme führen.

Beispiel 6.3: Wenn man die drei Gleichungen (6.7) nicht in Form der Matrizengleichung (6.8), sondern in der folgenden Weise als Matrizengleichung schreibt,

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ -6 & -1 & -6 \\ -3 & -2 & -2 \end{bmatrix}, \tag{6.14}$$

d. h.,

$$\underline{\tilde{y}}^T = \underline{\tilde{x}}^T \cdot \underline{B}, \tag{6.15}$$

so erhält man mit der zu (6.10) analogen Forderung

$$\underline{\tilde{y}}^T = \tilde{\lambda}\, \underline{\tilde{x}}^T \tag{6.16}$$

das linksseitige Eigenwertproblem

$$\tilde{\lambda}\, \underline{\tilde{x}}^T = \underline{\tilde{x}}^T \cdot \underline{B} \Longleftrightarrow \underline{\tilde{x}}^T \cdot (\underline{B} - \tilde{\lambda}\, \underline{E}) = \underline{o}^T, \tag{6.17}$$

ausführlich geschrieben:

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_1 & \tilde{x}_2 & \tilde{x}_3 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ -6 & -1 & -6 \\ -3 & -2 & -2 \end{bmatrix} - \tilde{\lambda} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_1 & \tilde{x}_2 & \tilde{x}_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 - \tilde{\lambda} & 2 & 4 \\ -6 & -1 - \tilde{\lambda} & -6 \\ -3 & -2 & -2 - \tilde{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{6.18}$$

Für die linksseitigen Eigenvektoren und Eigenwerte ist hier (in (6.17) zum Beispiel)) das Zeichen ~ verwendet worden, um den Unterschied zu den rechtsseitigen Eigenvektoren und Eigenwerten in (6.12) deutlich zu machen.
Hierzu sind mehrere Anmerkungen zu machen:

1. Wie später in Satz 6.5 gezeigt wird, stimmen die linksseitigen Eigenwerte mit den rechtsseitigen Eigenwerten überein: $\tilde{\lambda} = \lambda$. Hier ist eine Unterscheidung also nicht nötig.

2. In (6.14) bis (6.18) stimmen die Vektorkoordinaten x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 mit denen von (6.7) bis (6.13) überein (sie beschreiben ja das gleiche System) und daher unterscheiden sich in diesem Beispiel 6.3 die linksseitigen Eigenvektoren nicht von den rechtsseitigen des vorhergehenden Beispiels. Das ist aber ein Sonderfall dieser beiden Beispiele und liegt daran, daß in Beispiel 6.3 mit der Matrix $\underline{B}$ gerade die Transponierte der Matrix $\underline{A}$ aus Beispiel 6.2 untersucht wird. In der Regel unterscheiden sich die linksseitigen von den rechtsseitigen Eigenvektoren einer Matrix $\underline{A}$.

Künftig werden wir uns auf das rechtsseitige Eigenwertproblem beschränken, da das linksseitige Eigenwertproblem für $\underline{A}$ immer in ein rechtsseitiges Eigenwertproblem für $\underline{A}^T$ überführt werden kann. Denn wenn man das linksseitige Problem

$$\tilde{\underline{x}}^T \cdot (\underline{A} - \lambda \underline{E}) = \underline{o}^T \qquad (6.19)$$

transponiert, so ergibt sich mit (2.41), 1. Lehrbrief, daraus

$$(\underline{A} - \lambda \underline{E})^T \cdot \tilde{\underline{x}} = \underline{o} \iff (\underline{A}^T - \lambda \underline{E}) \cdot \tilde{\underline{x}} = \underline{o} ,$$

also ein rechtsseitiges Eigenwertproblem für $\underline{A}^T$.
Im übrigen erkennt man hieran gleich den Satz: Die linksseitigen Eigenvektoren von $\underline{A}$ stimmen mit den rechtsseitigen Eigenvektoren von $\underline{A}^T$ überein.

In diesem Lehrbrief wollen wir zunächst nur die Methoden zur Berechnung von Eigenwerten λ_i und Eigenvektoren $\underline{x}_k$ einer Matrix $\underline{A}$ kennenlernen und die hiermit zusammenhängenden Probleme der Hauptachsentransformation von Matrizen betrachten, ohne im einzelnen diese Methoden (ausgenommen Abschnitt 6.4.) zur Berechnung praktischer Probleme einzusetzen, deren mathematische Modellierung und Lösung doch noch erheblich über die Eigenwerttheorie hinausgehende Kenntnisse erfordert (z. B. Theorie der Differentialgleichungen).

6.3. Berechnung der Eigenwerte einer quadratischen Matrix

Beispiel 6.4: Die Aufgabe bestehe darin, die Eigenwerte der Matrix $\underline{A}$ aus Beispiel 6.1, Gleichung (6.7), zu berechnen, d. h. die λ-Werte, für welche die Beziehung (6.12) bzw. (6.13) gültig ist.

Hierbei handelt es sich um ein homogenes lineares Gleichungssystem für die drei Variablen x_1, x_2, x_3, wobei in der Koeffizientenmatrix noch ein geeignet zu wählender Parameter λ enthalten ist.
Dieses Gleichungssystem wird in die für die Anwendung des Gauß-Algorithmus günstige Form gebracht:

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 5-\lambda & -6 & -3 & 0 \\ 2 & -1-\lambda & -2 & 0 \\ 4 & -6 & -2-\lambda & 0\,. \end{array} \qquad (6.20)$$

Vor Beginn der Elementarumformungen im Sinne des Gauß-Algorithmus sei die zu erwartende Lösung noch diskutiert.

Das mit (6.20) gegebene homogene Gleichungssystem ist immer trivial lösbar; diese Lösung jedoch interessiert hier grundsätzlich nicht. Eine mögliche nichttriviale Lösung, die dann eine Parameterlösung sein muß (vgl. Sätze 3.2 und 3.4, 2. Lehrbrief), erfordert, daß der Rang r der in (6.20) enthaltenen Koeffizientenmatrix $\underline{A} - \lambda \underline{E}$ kleiner als die Anzahl n der Variablen ist,

$$r = \mathrm{Rg}\,(\underline{A} - \lambda \underline{E}) < n\,.$$

Das bedeutet, daß

$$\det\,(\underline{A} - \lambda \underline{E}) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -6 & -3 \\ 2 & -1-\lambda & -2 \\ 4 & -6 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (6.21)$$

gefordert werden muß (charakteristische Gleichung). Es entsteht bei der Berechnung der Determinante in Gleichung (6.21)

$$\begin{array}{l} -1\,| \\ \\ (*) \end{array} \begin{vmatrix} 5-\lambda & -6 & -3 \\ 2 & -1-\lambda & -2 \\ 4 & -6 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1+\lambda \\ 2 & -1-\lambda & -2 \\ 4 & -6 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\cdot[(-1-\lambda)(-2-\lambda) - 12] - (1-\lambda)\cdot[-12 + 4(1+\lambda)]$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2) = 0\,.$$

Das aus der Berechnung der Determinante zuletzt erhaltene Polynom für λ, das sogenannte <u>charakteristische Polynom</u>, enthält in diesem Beispiel drei Wurzeln, die sogenannten charakteristischen Lö-

sungen (Eigenwerte):

$$\lambda_1 = 1; \quad \lambda_2 = 2; \quad \lambda_3 = -1 \; . \tag{6.22}$$

Die so gewonnenen Eigenwerte können bei bestimmten Matrizen, die in Abschnitt 6.6.3. noch genauer charakterisiert werden, zu einer Diagonalmatrix, der Eigenwertmatrix oder Spektralmatrix $\underline{\Lambda}$, zusammengefaßt werden:

$$\underline{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} . \tag{6.23}$$

In diesem Beispiel ergeben sich aus der Matrix vom Typ (3,3), und damit aus dem λ-Polynom 3. Ordnung, drei einfache Eigenwerte. In anderen Fällen kann man jedoch auch auf mehrfache Eigenwerte geführt werden.

Definition 6.3: Gegeben ist die Matrix

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots & a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{bmatrix} .$$

Die Lösungen λ_i der hieraus gebildeten charakteristischen Gleichung

$$\det (A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \cdots & a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = P_n(\lambda) = 0 \tag{6.24}$$

sind die Eigenwerte (charakteristische Zahlen) der Matrix $\underline{A}$.

Satz 6.1: Eine Matrix vom Typ (n,n) besitzt genau n (reelle oder komplexe) Eigenwerte, wenn man die Vielfachheit der mehrfachen Lösungen der charakteristischen Gleichung in die Zählung einbezieht.

Beweis: Wie in der Analysis (z. B. Sieber, N./Sebastian, H.-J./Zeidler, G.: Grundlagen der Mathematik, Abbildungen, Funktionen, Folgen (Band 1 der Reihe MINÜL), 4. bearb. Auflage, BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1980) gezeigt wird, besitzt ein Polynom n-ten Grades genau n (reelle oder komplexe) Nullstellen, wenn man mehrfache Wurzeln entsprechend ihrer Vielfachheit zählt. ■

Satz 6.2: Eine Matrix $\underline{A}$ besitzt genau dann den Eigenwert $\lambda = 0$, wenn sie singulär ist, d. h., wenn $\det \underline{A} = 0$ gilt.

Beweis: Aus (6.24), d. h., aus $\det (\underline{A} - \lambda \underline{E}) = 0$, folgt für $\lambda = 0$: $\det \underline{A} = 0$. Das Umgekehrte ($\det \underline{A} = 0 \Longrightarrow \lambda = 0$) können Sie mit Hilfe von Gleichung (1.10), 1. Lehrbrief, selbst beweisen. ■

Beispiel 6.4: Die Berechnung der Eigenwerte der Matrix (vgl. Aufgabe 2.21, 1. Lehrbrief)

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

über (6.24) führt auf

$$\det (\underline{A} - \lambda \underline{E}) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2,$$

wovon $\lambda_1 = 0$ in dem hier erläuterten Zusammenhang besondere Beachtung verdient ($\det \underline{A} = 0$).

Satz 6.3: Sind die Eigenwerte der Matrix $\underline{A}$ durch λ_i gegeben, so ermittelt man die Eigenwerte λ_i' der zugehörigen inversen Matrix $\underline{A}^{-1}$ nach $\lambda_i' = \frac{1}{\lambda_i}$.

Beweis: Nach (6.12) gilt

$$\underline{A} \cdot \underline{x} = \lambda \underline{x} \Longleftrightarrow \underline{A}^{-1} \cdot \underline{A} \cdot \underline{x} = \lambda \underline{A}^{-1} \cdot \underline{x} \Longleftrightarrow \underline{x} = \lambda \underline{A}^{-1} \cdot \underline{x} \Longleftrightarrow \underline{A}^{-1} \cdot \underline{x} = \frac{1}{\lambda} \underline{x}\ .$$ ■

Beispiel 6.5: Die Eigenwerte der Diagonalmatrix

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ergeben sich aus

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\,(3-\lambda)\,(-1-\lambda) = 0$$

zu $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = -1$, d. h., die Eigenwerte einer Diagonalmatrix stehen unmittelbar in der Hauptdiagonalen dieser Matrix. Das heißt, die Spektralmatrix einer Diagonalmatrix ist die Diagonalmatrix selbst.

Die inverse Matrix $\underline{A}^{-1}$ ist entsprechend (2.30), 1. Lehrbrief, zu ermitteln:

$$\underline{A}^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Die aus dieser Matrix erhaltene charakteristische Gleichung

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2}-\lambda' & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}-\lambda' & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda' \end{vmatrix} = (\tfrac{1}{2}-\lambda')\,(\tfrac{1}{3}-\lambda')\,(-1-\lambda') = 0$$

liefert die Eigenwerte der Matrix $\underline{A}^{-1}$:

$$\lambda'_1 = \frac{1}{2}\,,\ \lambda'_2 = \frac{1}{3}\,,\ \lambda'_3 = -1\,.$$

Satz 6.4: Die Eigenwerte λ_i einer Matrix $\underline{A}$ stimmen mit denen der transponierten Matrix $\underline{A}^T$ überein:

$$\underline{A}\cdot\underline{x} = \lambda\,\underline{x} \Longleftrightarrow \underline{A}^T\cdot\underline{x} = \lambda\,\underline{x}$$

mit $\underline{x} \neq \underline{o}$.

Beweis: Bezeichnen wir die Eigenwerte der transponierten Matrix $\underline{A}^T$ zunächst als $\tilde{\lambda}$, so gilt

$$\det\,(\underline{A}^T - \tilde{\lambda}\,\underline{E}) = \det\,(\underline{A} - \tilde{\lambda}\,\underline{E})^T = \det\,(\underline{A} - \tilde{\lambda}\,\underline{E}) = 0\,. \qquad (6.25)$$

Der erste Ausdruck in (6.25) entspricht der Berechnung von Eigenwerten nach (6.24) für die transponierte Matrix $\underline{A}^T$.
Wegen $\underline{E} = \underline{E}^T$ und nach Anwendung der Formel (2.40), 1. Lehrbrief, entsteht hieraus der zweite Ausdruck in (6.25). Der letzte Ausdruck in (6.25) ergibt sich dann durch die Anwendung von Satz 1.1,

1. Lehrbrief. Der Vergleich der Beziehung $\det (\underline{A} - \tilde{\lambda}\,\underline{E}) = 0$ aus (6.25) als Formel zur Berechnung der Eigenwerte $\tilde{\lambda}$ der transponierten Matrix $\underline{A}^T$ mit der Beziehung $\det (\underline{A} - \lambda\,\underline{E}) = 0$ als Formel zur Berechnung der Eigenwerte λ der Matrix $\underline{A}$ läßt $\tilde{\lambda} = \lambda$ erkennen. ■

Satz 6.5: Die Eigenwerte der linksseitigen stimmen mit denen der rechtsseitigen Eigenwertaufgabe überein.

Beweis: Wir bezeichnen zunächst die Größen des linksseitigen Problems mit $\tilde{\underline{x}}$ und $\tilde{\lambda}$, während die des rechtsseitigen Problems als $\underline{x}$ und λ dargestellt werden. Dann gilt

$$\underline{A} \cdot \underline{x} = \lambda\,\underline{x} \Longleftrightarrow \det (\underline{A} - \lambda\,\underline{E}) = 0 \Longleftrightarrow \det (\underline{A}^T - \lambda\,\underline{E}) = 0$$

für das rechtsseitige Problem (die letzte Gleichung nach Satz 6.4). Ferner gilt für das linksseitige Eigenwertproblem

$$\tilde{\underline{x}}^T \cdot \underline{A} = \tilde{\lambda}\,\tilde{\underline{x}}^T \Longleftrightarrow \underline{A}^T \cdot \tilde{\underline{x}} = \tilde{\lambda}\,\tilde{\underline{x}} \Longleftrightarrow (\underline{A}^T - \tilde{\lambda}\,\underline{E})\,\tilde{\underline{x}} = \underline{o} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \det (\underline{A}^T - \tilde{\lambda}\,\underline{E}) = 0 \ .$$

(Die zweite Gleichung entstand durch Transponieren.) Der Vergleich der jeweils zuletzt erhaltenen Beziehungen zeigt: $\lambda = \tilde{\lambda}$. ■

* Aufgabe 6.3:

a) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix $\underline{A}$ aus Aufgabe 2.18, 1. Lehrbrief!

b) Geben Sie die Eigenwerte der inversen Matrix $\underline{A}^{-1}$ zur Matrix $\underline{A}$ aus Aufgabe 2.18, 1. Lehrbrief, an!

c) Warum treten hier in a und b die gleichen Eigenwerte auf?

* Aufgabe 6.4: Es sind die Eigenwerte der folgenden Matrizen zu bestimmen:

a)
$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

b)
$$\underline{B} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}.$$

* Aufgabe 6.5: Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrizen

a)
$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & -6 & 0 \end{bmatrix};$$

b)
$$\underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}!$$

6.4. Eine Eigenwertaufgabe bei zeitdiskreten Systemen

Dieser Abschnitt kann übergangen werden, ohne daß dadurch Schwierigkeiten beim Studium des nachfolgenden Stoffes entstehen. Elektrotechniker und Informationsverarbeiter sollten allerdings diese Ausführungen zum Zwecke der Bestenförderung spätestens nach dem Studium von Abschnitt 6.6.3. zur Kenntnis nehmen.

Wir betrachten ein einfaches zeitdiskretes System, d. h. ein System, welches am Ausgang mit einer Ausgangsimpulsfolge y(k T) antwortet, wenn es am Eingang mit einer Eingangsimpulsfolge x(k T) gespeist wird (Bild 6.4).

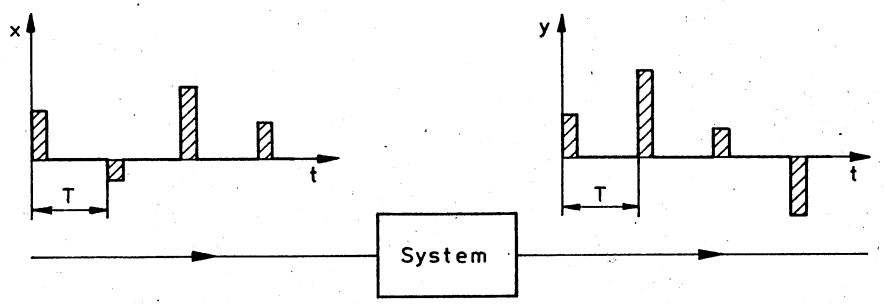
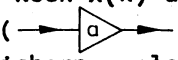
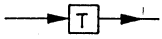


Bild 6.4

Die Impulsabstände betragen dabei T; für k gilt $k \in N$. Wir schreiben häufig statt $x(k\,T)$ und $y(k\,T)$ nur noch $x(k)$ und $y(k)$. Das System selbst bestehe aus Verstärkern (), Addierern ( ) und Verzögerern oder Speichern, welche das Signal um T verzögern (). Die Wirkung eines Verzögerungs- oder Speicherelementes ist aus Bild 6.5 ersichtlich.

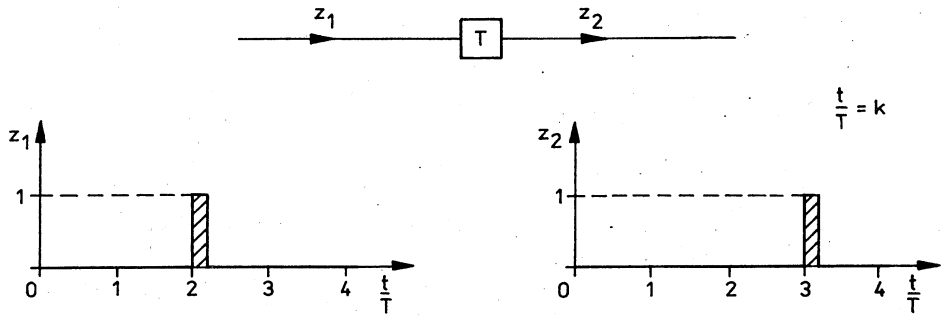


Bild 6.5

Offenbar gilt:

$$z_2(k) = z_1(k-1) \quad \text{oder}$$
$$z_2(k+1) = z_1(k)\ . \tag{6.26}$$

In Bild 6.6 ist ein Beispiel für ein zeitdiskretes System gegeben (Fritzsche, G.: Zeitdiskrete und digitale Systeme, Akademie-Verlag, Berlin 1981 (Reihe WTB)).

An sich interessiert bei der Analyse des Systems nur die Beziehung zwischen der Eingangsimpulsfolge und der Ausgangsimpulsfolge. Es hat sich jedoch als zweckmäßig erwiesen, auch die Signale $z_n(k)$ an den Speicherausgängen (innere Signale, Zustandsgrößen) zu beschreiben, da sich dann auch die Beziehungen zwischen $x(k)$ und $y(k)$ um so einfacher darstellen lassen.

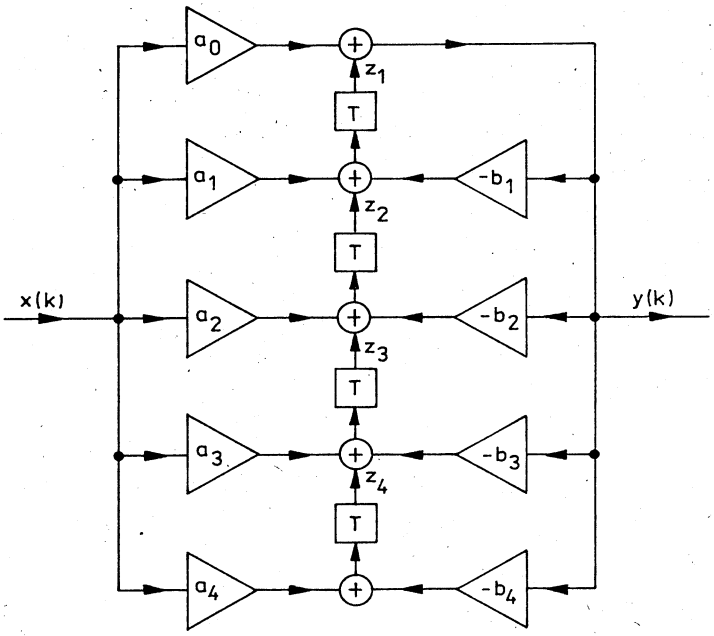


Bild 6.6

Nach Bild 6.6 und unter Verwendung von (6.26) ergibt sich offensichtlich

$$\begin{aligned} z_4(k+1) &= -b_4\, z_1(k) + (a_4 - a_0\, b_4)\, x(k) \\ z_3(k+1) &= -b_3\, z_1(k) + (a_3 - a_0\, b_3)\, x(k) + z_4(k) \\ z_2(k+1) &= -b_2\, z_1(k) + (a_2 - a_0\, b_2)\, x(k) + z_3(k) \\ z_1(k+1) &= -b_1\, z_1(k) + (a_1 - a_0\, b_1)\, x(k) + z_2(k) \end{aligned} \qquad (6.27)$$

und

$$y(k) = z_1(k) + a_0 \cdot x(k). \qquad (6.28)$$

Schreibt man (6.27) in Matrixform, so entsteht

$$\begin{bmatrix} z_1(k+1) \\ z_2(k+1) \\ z_3(k+1) \\ z_4(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b_1 & 1 & 0 & 0 \\ -b_2 & 0 & 1 & 0 \\ -b_3 & 0 & 0 & 1 \\ -b_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1(k) \\ z_2(k) \\ z_3(k) \\ z_4(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 - a_0\, b_1 \\ a_2 - a_0\, b_2 \\ a_3 - a_0\, b_3 \\ a_4 - a_0\, b_4 \end{bmatrix} \cdot x(k), \qquad (6.29)$$

bzw., in Kurzform,

$$\underline{z}(k+1) = \underline{A} \cdot \underline{z}(k) + \underline{B}\, x(k) \,. \tag{6.30}$$

Man nennt z(k) den Zustandsvektor, die Gleichung (6.29) bzw. (6.30) eine Zustandsgleichung des Systems (die zweite Zustandsgleichung des Systems ist mit (6.28) gegeben)) und $\underline{A}$ die Kernmatrix des Systems.
Bei der Analyse des Systems hat man nun zunächst das Differenzengleichungssystem (6.29) zu lösen, Daraus erhält man als Ergebnis die Impulsfolge $z_1(k)$. Diese setzt man in (6.28) nebst x(k) ein, und es ergibt sich so die Ausgangsimpulsfolge y(k). Dies soll jedoch hier nicht demonstriert werden, vielmehr soll die Aufmerksamkeit auf die Kernmatrix $\underline{A}$ in (6.30) gelenkt werden, welche charakteristisch für das vorliegende System ist. (Dies ist am deutlichsten zu erkennen, wenn man vorübergehend x(k) = 0 setzt, wenn man das System also von außen nicht beeinflußt.)

Man untersucht also speziell den Zusammenhang

$$\underline{z}(k+1) = \underline{A} \cdot \underline{z}(k) \tag{6.31}$$

mit

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -b_1 & 1 & 0 & 0 \\ -b_2 & 0 & 1 & 0 \\ -b_3 & 0 & 0 & 1 \\ -b_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{6.32}$$

um Aussagen über das System zu gewinnen. Die Untersuchungen lassen sich um so leichter führen, wenn man in (6.31) die den Zustand des Systems beschreibenden Größen $\underline{z}(k)$ durch andere, ebenfalls den Zustand beschreibende Größen $\underline{\tilde{z}}(k)$ ersetzt, deren Zusammenhang mit $\underline{z}(k)$ durch die Gleichung

$$\underline{z}(k) = \underline{X} \cdot \underline{\tilde{z}}(k) \tag{6.33}$$

gegeben ist. Die Gleichung (6.31) geht dabei offensichtlich in

$$\underline{\tilde{z}}(k+1) = \underline{X}^{-1} \cdot \underline{A} \cdot \underline{X} \cdot \underline{\tilde{z}}(k) \tag{6.34}$$

über. Die in (6.33) eingeführte Transformationsmatrix $\underline{X}$ wird dabei so gewählt, daß die in (6.34) gebildete Matrix $\underline{X}^{-1} \cdot \underline{A} \cdot \underline{X}$ eine möglichst einfache Form, die Diagonalform, annimmt. Wir werden diesen Sachverhalt später (Abschnitt 6.6.3.) noch ausführ-

licher darstellen. Hier sei nur vorweggenommen, daß man als Diagonalmatrix $\underline{X}^{-1} \cdot \underline{A} \cdot \underline{X}$ die Spektralmatrix $\underline{\Lambda}$, also

$$\underline{X}^{-1} \cdot \underline{A} \cdot \underline{X} = \underline{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}, \qquad (6.35)$$

erhält (vgl. (6.23)).
Die Untersuchung des zeitdiskreten Systems aus Bild 6.6 läuft im wesentlichen also auf die Untersuchung der Gleichung

$$\underline{\tilde{z}}(k+1) = \underline{\Lambda} \cdot \underline{\tilde{z}}(k) \qquad (6.36)$$

hinaus, also auf die Untersuchung der skalaren Gleichungen

$$\tilde{z}_1(k+1) = \lambda_1 \tilde{z}_1(k) ,$$
$$\tilde{z}_2(k+1) = \lambda_2 \tilde{z}_2(k) ,$$
$$\vdots$$

Eines der Ziele solcher Systemuntersuchungen ist es festzustellen, ob das System stabil ist oder nicht. Stabil ist ein System, wenn mit $|x(k)| < \infty$ auch $|y(k)| < \infty$ gewährleistet ist für beliebige k. Dies bedeutet wegen (6.28) auch, daß $|z_i(k)| < \infty$ gefordert werden muß und daher wegen (6.33) auch $|\tilde{z}_i(k)| < \infty$ für beliebige k. Nach (6.37) bedeutet dies aber, daß $|\lambda_i| < 1$ für ein stabiles System zu fordern ist (damit die Zustandsgrößen nicht mit zunehmendem k, d. h. mit zunehmender Signaldauer, laufend größere Werte annehmen).
Beispielsweise entstände für ein System nach Bild 6.6 mit den Verstärkerwerten $b_1 = 0$, $b_2 = -1$, $b_3 = 0$, $b_4 = \frac{3}{16}$ die Kernmatrix

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{16} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

die wegen

$$\det(\underline{A} - \lambda \underline{E}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ \frac{3}{16} & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 - \lambda^2 + \frac{3}{16} = 0$$

die Eigenwerte

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{3}{4}}, \quad \lambda_2 = -\sqrt{\frac{3}{4}}, \quad \lambda_3 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_4 = -\frac{1}{2}$$

besitzt. Sie genügen der Ungleichung $|\lambda_i| < 1$, das System ist daher stabil.
Andererseits ergibt sich für $b_1 = b_3 = 0$, $b_2 = -4$, $b_4 = -12$ aus $\underline{A}$ in (6.32) eine Matrix, deren Eigenwerte $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{6}$, $\lambda_{3,4} = \pm j\sqrt{2}$ die Stabilitätsbedingungen $|\lambda_i| < 1$ nicht erfüllen.

6.5. Berechnung der Eigenvektoren einer quadratischen Matrix

Anhand von Beispielen wollen wir in diesem Abschnitt die Berechnung von Eigenvektoren gegebener quadratischer Matrizen durchführen, nachdem die Eigenwerte bereits nach der in Abschnitt 6.3. vorgelegten Methode ermittelt wurden. Dabei soll unterschieden werden, ob die Eigenwerte der Matrix durchweg einfache Lösungen oder teilweise mehrfache Lösungen des charakteristischen Polynoms sind, da dies auch Einfluß auf die Berechnung der Eigenvektoren hat. Wir geben zunächst die

Definition 6.4: Der Eigenvektor $\underline{x}_i$ zum Eigenwert λ_i der quadratischen Matrix $\underline{A}$ vom Typ (n,n) ist die nichttriviale Lösung des Gleichungssystems

$$\underline{A} \cdot \underline{x}_i = \lambda_i \underline{x}_i \quad \text{bzw.} \quad (\underline{A} - \lambda_i \underline{E})\, \underline{x}_i = \underline{o}, \; i = 1, \ldots, n \quad (6.38)$$

6.5.1. Eigenvektoren bei einfachen Eigenwerten

Beispiel 6.7: Die Eigenvektoren der Matrix

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 4 & -6 & -2 \end{bmatrix}$$

aus Beispiel 6.2. seien zu berechnen. Dazu bringt man die Matrix in die Form des Gleichungssystems (6.20) und berechnet wie in Abschnitt 6.3. die drei Eigenwerte, die mit (6.23) bereits gegeben sind. Jeder dieser Eigenwerte wird in das Gleichungssystem (6.20) eingesetzt und die zugehörige nichttriviale Lösung $\underline{x} = \left[x_1 \quad x_2 \quad x_3\right]^T$ berechnet.

a) $\lambda_1 = 1$

Aus (6.20) bzw. (6.38) entsteht dann das Gleichungssystem

x_{11}	x_{21}	x_{31}	1
4	-6	-3	0
2	-2	-2	0
4	-6	-3	0 ,

(6.39)

auf welches der Gauß-Algorithmus anzuwenden ist (analog zu Beispiel 3.15, 2. Lehrbrief):

	x_{11}	x_{21}	x_{31}	1
-2 |	4	-6	-3	0
(*)	2	-2	-2	0
-2	4	-6	-3	0
(*)	0	-2	1	0
-1 |	0	-2	1	0
(*)	0	0	0	0 .

Wir haben zunächst die drei Variablen x_1, x_2, x_3 aus (6.20) mit einem zweiten Index 1 versehen, um kenntlich zu machen, daß dies die drei Lösungen zum ersten Eigenwert λ_1 sind.

Die drei (*)-Gleichungen liefern die Lösung

$$x_{31} = 2\,t, \quad x_{21} = \frac{1}{2}\,x_{31} = t, \quad x_{11} = x_{21} + x_{31} = 3\,t\,,$$

wobei der Ansatz $x_{31} = 2\,t$ aus Gründen der Zweckmäßigkeit erfolgte (Vermeidung von Brüchen bei x_{21} und x_{11}).

Der Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ lautet also

$$\underline{x}_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}. \qquad (6.40)$$

Oft interessiert aber der hieraus zu gewinnende normierte Eigenvektor

$$\underline{x}_{1n} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} .$$

Dieser Eigenvektor $\underline{x}_1$ (und damit auch $\underline{x}_{1n}$) befriedigt tatsächlich die in (6.38) dargestellte Gleichung für $\lambda = 1$, wie man durch Einsetzen nachprüfen kann.

b) $\lambda_2 = 2$

Aus (6.20) bzw. (6.38) enteteht nach Anwendung des Gauß-Algorithmus analog zu (6.39)

	x_{12}	x_{22}	x_{32}	1
-2|	3	-6	-3	0
(*)	2	-3	-2	0
-2|	4	-6	-4	0
(*)	-1	0	1	0
(*)	0	0	0	0 ,

$x_{32} = t$

$x_{12} = x_{32} = t$

$x_{22} = 2\,x_{12} - 2\,x_{32} = 0$

$$\underline{x}_2 = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} ; \quad \underline{x}_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} . \qquad (6.41)$$

Dieser Eigenvektor befriedigt die Gleichung (6.38) für $\lambda = 2$. (Prüfen Sie dies nach!)

c) $\lambda_3 = -1$

	x_{13}	x_{23}	x_{33}	1
-3|	6	-6	-3	0
-2|	2	0	-2	0
(*)	4	-6	-1	0
(*)	-6	12	0	0
-1|	-6	12	0	0
(*)	0	0	0	0 ,

$x_{23} = t$

$x_{13} = 2\,x_{23} = 2\,t$

$x_{33} = 4\,x_{13} - 6\,x_{23} = 2\,t$

$$x_3 = \begin{bmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \underline{x}_{3n} = \frac{1}{\sqrt{9}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}. \tag{6.42}$$

Auch dieser Eigenvektor befriedigt (6.38) für $\lambda = -1$.

Damit wären drei Eigenvektoren berechnet, die man zweckmäßig zu einer Matrix, der sogenannten Eigenvektor- oder Modalmatrix $\underline{X}$, zusammenfaßt:

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} \underline{x}_1 & \underline{x}_2 & \underline{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \tag{6.43}$$

Die aus diesem Beispiel offensichtlich zu ziehenden Schlußfolgerungen verallgemeinern wir gleich für Matrizen vom Typ (n,n):

Satz 6.6: Matrizen $\underline{A}$ von Typ (n,n) mit n einfachen Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ besitzen genau n linear unabhängige Eigenvektoren $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n$ von der Dimension n und somit eine Modalmatrix vom Typ (n,n).

Beweis: Daß für n einfache Eigenwerte n Eigenvektoren der Dimension n zu berechnen sind, bedarf nicht des Beweises, denn für jeden Wert λ_i löst man ein Gleichungssystem für die n Variablen $\underline{x}_{1i}, \underline{x}_{2i}, \ldots, \underline{x}_{ni}$, die jeweils zu einem Vektor der Dimension n zusammengefaßt werden. Zu beweisen ist jedoch, daß diese Eigenvektoren linear unabhängig sind. Wir beschränken uns dabei zunächst auf zwei verschiedene Eigenwerte mit den zugehörigen Eigenvektoren (/8/, § 5.2, siehe Literaturverzeichnis im 1. Lehrbrief), deren Unabhängigkeit dadurch angezeigt wird, daß zur Befriedigung der Gleichung

$$c_1 \underline{x}_1 + c_2 \underline{x}_2 = \underline{o} \tag{6.44}$$

notwendig $c_1 = c_2 = 0$ gewählt werden muß (siehe Definition 4.8, 3. Lehrbrief). Wir haben diese Notwendigkeit also zu zeigen. Multiplizieren wir die Gleichung (6.44) mit A und berücksichtigen (6.38), so entsteht

$$c_1 \lambda_1 \underline{x}_1 + c_2 \lambda_2 \underline{x}_2 = \underline{o}. \tag{6.45}$$

Wir multiplizieren andererseits (6.44) mit λ_1 und subtrahieren

die so erhaltene Gleichung von (6.45), so daß wir

$$c_2 (\lambda_2 - \lambda_1) \underline{x}_2 = \underline{o}$$

erhalten. Wegen $\lambda_2 \neq \lambda_1$ nach Voraussetzung und $x_2 \neq \underline{o}$ (siehe bei (6.11) und (6.39)) folgt hieraus $c_2 = 0$ und damit aus (6.44) auch $c_1 = 0$. Damit ist der Beweis für zwei Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten erbracht.
In diesem Sinne kann man auch die Unabhängigkeit mehrerer Eigenvektoren zu jeweils verschiedenen Eigenwerten nachweisen. (Interessierte Leser verweisen wir auf /8/ und /2/.) ■

Satz 6.7: Die Modalmatrix $\underline{X}$ ist eine nichtsinguläre Matrix, d. h., zu $\underline{X}$ existiert die inverse Matrix $\underline{X}^{-1}$.

Beweis: Nach Satz 6.6 sind die Eigenvektoren $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n$ linear unabhängig, d. h., daß das Gleichungssystem

$$c_1 \underline{x}_1 + c_2 \underline{x}_2 + \ldots + c_n \underline{x}_n = \underline{o} \qquad (6.46)$$

nur die triviale Lösung $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$ besitzt. Das ist aber nur möglich, wenn die Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems (6.46) für die Variablen $c_1, c_2, \ldots, c_2$, nämlich

$$\left[\underline{x}_1 \quad \underline{x}_2 \quad \ldots \quad \underline{x}_n\right] = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & & x_{nn} \end{bmatrix},$$

den Rang n besitzt, also folgt

$$\det\left[\underline{x}_1 \quad \underline{x}_2 \quad \ldots \quad \underline{x}_n\right] \neq 0, \text{ d. h., } \det \underline{X} \neq 0 .$$

Damit ist die Voraussetzung für die Existenz der inversen Matrix $\underline{X}^{-1}$ zur Modalmatrix $\underline{X}$ erfüllt.

Bemerkung 6.5: Eigenvektoren werden aus der Eigenwertaufgabe, d. h. als nichttriviale Lösung der Gleichung $\underline{A} \cdot \underline{x} = \lambda \underline{x}$, nur bis auf einen willkürlich wählbaren Faktor (in den vorangegangenen Berechnungen als t bezeichnet) bestimmt.

* Aufgabe 6.6: Geben Sie die Eigenwerte, Eigenvektoren und die Modalmatrix zur Matrix

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

an!

* Aufgabe 6.7: Eigenwerte und Modalmatrix $\underline{X}$ zur Matrix

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

sind gesucht. Zeigen Sie, daß die Eigenvektoren linear unabhängig sind!

* Aufgabe 6.8: Ermitteln Sie die Eigenvektoren und die Modalmatrix $\underline{X}$ zur Matrix $\underline{A}$ aus Aufgabe 6.4a!

6.5.2. Eigenvektoren bei mehrfachen Eigenwerten

Die beiden folgenden Matrizen $\underline{B}$ und $\underline{C}$ besitzen in gleicher Weise mehrfache Eigenwerte, führen aber dennoch zu unterschiedlichen Ergebnissen bei der Berechnung der Eigenvektoren.

Beispiel 6.8: Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{6.47}$$

sind zu ermitteln.
Die Eigenwerte ergeben sich aus der folgenden Rechnung:

$$\det\left(\begin{bmatrix} -3-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & -\lambda & 1 \\ -2 & 1 & -\lambda \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 0 & -2 \\ 2 & 1-\lambda & 1 \\ -2 & 1-\lambda & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2 + 4\lambda - 5) = 0\,,$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda_2 = 1 \quad \text{(zweifacher Eigenwert)}, \\ \lambda_3 &= -5 \quad\quad\;\; \text{(einfacher Eigenwert)}. \end{aligned} \tag{6.48}$$

Von den Eigenvektoren werden zunächst diejenigen zum zweifachen Eigenwert $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ berechnet.

a) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$

Für $\lambda = 1$ entsteht aus $(\underline{B} - \lambda \underline{E})\,\underline{x} = \underline{o}$ das Gleichungssystem

x_1	x_2	x_3	1
-4	2	-2	0
2	-1	1	0
-2	1	-1	0 ,

welches offensichtlich den Rang 1 besitzt und daher eine zweiparametrige Lösung ergibt (Satz 3.2, 2. Lehrbrief):

$$x_3 = t, \quad x_1 = s, \quad x_2 = x_3 + 2\,x_1 = t + 2\,s ,$$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} s \\ t + 2\,s \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} . \qquad (6.49)$$

Aus (6.49) können zwei linear unabhängige Eigenvektoren (entsprechend Abschnitt 3.5.2., 2. Lehrbrief) durch geeigneten Ansatz für s und t gewonnen werden. Wir wählen s und t zunächst in der Form 1 und 0 und danach als 0 und 1.

Erster Ansatz:

$$s = 1, \quad t = 0 \Longrightarrow \underline{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} . \qquad (6.50)$$

Zweiter Ansatz:

$$s = 0, \quad t = 1 \Longrightarrow x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} . \qquad (6.51)$$

Nachträglich können diese Eigenvektoren noch normiert werden.

b) $\lambda_3 = -5$

	x_{13}	x_{23}	x_{33}	1
(*)	2	2	-2	0
-1|	2	5	1	0
1|	-2	1	5	0
(*)	0	3	3	0
-1|	0	3	3	0

Der Rang des Gleichungssystems ist offenbar 2, daher

$$x_{33} = t, \quad x_{23} = -t, \quad x_{13} = -x_{23} + x_{33} = 2\,t\,,$$

$$\underline{x}_3 = t \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{x}_{3n} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{6.52}$$

Auch die in diesem Beispiel vorgelegte Matrix $\underline{B}$ besitzt also eine Modalmatrix $\underline{X}$:

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{6.53}$$

Beispiel 6.9: In diesem weiteren Beispiel für die Existenz mehrfacher Eigenwerte, der Matrix

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \tag{6.54}$$

mit der charakteristischen Gleichung

$$\lambda^3 - 4\,\lambda^2 + 5\,\lambda - 2 = 0$$

ergibt sich $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ (zweifach) und $\lambda_3 = 2$.

a) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ (zweifach)

	x_{11}	x_{21}	x_{31}	1
(*)	-1	1	1	0
-1|	-1	1	2	0
(*)	0	0	1	0
-1|	0	0	1	0
(*)	0	0	0	0

$x_{31} = 0$

$x_{21} = t$

$x_{11} = x_{21} + x_{31} = t$

$$\underline{x}_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \underline{x}_{1n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6.55}$$

b) $\lambda_3 = 2$

	x_{12}	x_{22}	x_{32}	1
-2|	-2	1	1	0
(*)	-1	0	2	0
(*)	0	0	0	0
(*)	0	1	-3	0

$$x_{32} = t$$
$$x_{22} = 3\, x_{32} = 3\, t$$
$$x_{12} = \frac{1}{2}\,(x_{22} + x_{32}) = 2\, t$$

$$\underline{x}_2 = t \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \underline{x}_{2n} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}. \qquad (6.56)$$

Der zweifache Eigenwert führt hier im Gegensatz zum Beispiel 6.8 nur zu einem linear unabhängigen Eigenvektor, daher lassen sich mit (6.55) und (6.56) insgesamt nur zwei linear unabhängige Eigenvektoren bestimmen.
Unter Einbeziehung der beiden letzten Beispiele kann der in Abschnitt 6.5.1. ausgesprochene Satz 6.6 zu folgender Aussage erweitert werden:

Satz 6.8: Matrizen vom Typ (n,n) besitzen höchstens n (linear unabhängige) Eigenvektoren $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$, ... von der Dimension n.

Erläuterung: Auch unter den Matrizen vom Typ (n,n) mit mehrfachen Eigenwerten gibt es solche, die n Eigenvektoren besitzen, jedoch auch solche mit weniger als n Eigenvektoren.

Alle Matrizen vom Typ (n,n), denen genau n Eigenvektoren zugeordnet werden können, werden zu einer besonderen Klasse zusammengefaßt:

Definition 6.5: Matrizen vom Typ (n,n), für welche n linear unabhängige Eigenvektoren existieren, werden als diagonalähnliche Matrizen bezeichnet.

Bemerkung 6.6: Matrizen mit n verschiedenen Eigenwerten sind trivialerweise diagonalähnlich, da sie nach Satz 6.6 immer n (linear unabhängige) Eigenvektoren besitzen. Lediglich unter den Matrizen mit mehrfachen Eigenwerten kann man außer den diagonalähnlichen auch nichtdiagonalähnliche Matrizen finden. In der Praxis kommt den diagonalähnlichen Matrizen aber die größere Bedeutung zu. Wir werden uns daher zunächst mit diesen Matrizen be-

schäftigen. Die Berechtigung des Begriffes diagonalähnlich wird im Abschnitt 6.6. deutlich werden (Satz 6.11).

* Aufgabe 6.9: Stellen Sie fest, ob die folgenden Matrizen zur Klasse der diagonalähnlichen Matrizen gehören!

a) $\underline{A} = \begin{bmatrix} 5 & \sqrt{3} & -6 \\ \sqrt{3} & 7 & 2\sqrt{3} \\ -6 & 2\sqrt{3} & -4 \end{bmatrix}$;

b) $\underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$;

c) $\underline{C} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 6 & -1 \end{bmatrix}$;

d) $\underline{D} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 8 & 3 & 2 \\ -3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$;

e) $\underline{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1+j \\ 1-j & 1 \end{bmatrix}$.

6.6. Ähnlichkeitstransformation von Matrizen

6.6.1. Vektortransformation (Vorbemerkung)

Für manche Betrachtungen erweist es sich als zweckmäßig, Vektoren, die in einem kartesischen Koordinatensystem $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ mit $\underline{e}_1 \times \underline{e}_2 = \underline{e}_3$ gegeben sind, in einem anderen (kartesischen) Koordinatensystem $\{\tilde{\underline{e}}_1, \tilde{\underline{e}}_2, \tilde{\underline{e}}_3\}$ mit $\tilde{\underline{e}}_1 \times \tilde{\underline{e}}_2 = \tilde{\underline{e}}_3$ zu betrachten. Hat beispielsweise der Vektor $\underline{a}$ in dem im Bild 6.7a angegebenen Koordinatensystem

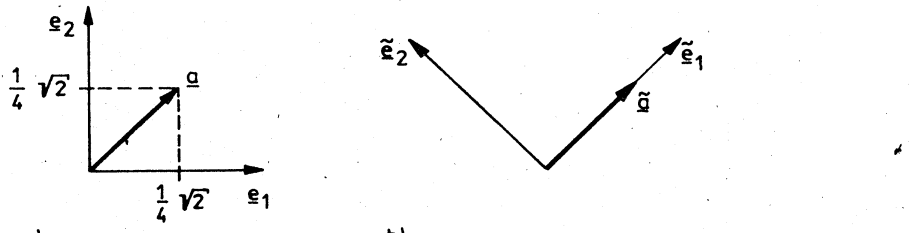


Bild 6.7

die Darstellung

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}\sqrt{2} \\ \\ \frac{1}{4}\sqrt{2} \end{bmatrix},$$

so vereinfacht sich diese in dem Koordinatensystem von Bild 6.7b zu

$$\tilde{\underline{a}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Der physikalischen Bedeutung nach ist dabei $\underline{a}$ mit $\tilde{\underline{a}}$ identisch.

Die Beziehung, die zwischen den Darstellungen $\underline{a}$ und $\tilde{\underline{a}}$ besteht, läßt sich mit Hilfe einer sogenannten Transformationsmatrix $\underline{T}$ ausdrücken:

$$\underline{a} = \underline{T} \cdot \tilde{\underline{a}} \,. \tag{6.57}$$

Im vorliegenden Fall wäre (rechnen Sie das durch Einsetzen in (6.57) nach!))

$$\underline{T} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \tag{6.58}$$

zu wählen. Dies ist der Spezialfall der Drehungsmatrix

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

für $\varphi = -\frac{\pi}{4}$. Wesentlich sind hier jedoch nicht diese Einzelheiten, sondern daß erkennbar wird, daß die Transformation (6.57) von Vektoren zu vereinfachten Darstellungen führen kann. Wie die Transformationsmatrix gefunden wird, muß noch dargelegt werden.

6.6.2. Ähnlichkeitstransformation

Wir transformieren (vgl. (6.57)) die Vektoren $\underline{x}$ und $\underline{y}$ aus der in (6.9) enthaltenen Gleichung,

$$\underline{x} = \underline{T} \cdot \tilde{\underline{x}}, \quad \underline{y} = \underline{T} \cdot \tilde{\underline{y}} \,, \tag{6.59}$$

und erkennen, wie dann die Beziehung $\underline{y} = \underline{A} \cdot \underline{x}$ aus (6.9) in den neuen Koordinaten anzugeben ist, d. h. ermitteln, wie die Matrix $\underline{\tilde{A}}$ in der Gleichung $\underline{\tilde{y}} = \underline{\tilde{A}} \cdot \underline{\tilde{x}}$ beschaffen ist.

Hierzu wird (6.59) in (6.9) eingesetzt; dabei entsteht

$$\underline{y} = \underline{A} \cdot \underline{x} \Longleftrightarrow \underline{T} \cdot \underline{\tilde{y}} = \underline{A} \cdot \underline{T} \cdot \underline{\tilde{x}} \Longleftrightarrow \underline{\tilde{y}} = \underline{T}^{-1} \cdot \underline{A} \cdot \underline{T} \cdot \underline{x} \; . \qquad (6.60)$$

Die letzte Gleichung in (6.60) soll als $\underline{\tilde{y}} = \underline{\tilde{A}} \cdot \underline{\tilde{x}}$ formuliert werden, wobei offensichtlich

$$\underline{\tilde{A}} = \underline{T}^{-1} \cdot \underline{A} \cdot \underline{T} \qquad (6.61)$$

zu setzen ist.

Definition 6.6: Zwei Matrizen $\underline{A}$ und $\underline{\tilde{A}}$ gleichen Typs (n,n) heißen ähnlich, wenn zwischen ihnen die Beziehung $\underline{\tilde{A}} = \underline{T}^{-1} \cdot \underline{A} \cdot \underline{T}$ mit einer (nichtsingulären) Transformationsmatrix $\underline{T}$ besteht. Die Überführung von $\underline{A}$ in $\underline{\tilde{A}}$ oder umgekehrt heißt eine Ähnlichkeitstransformation. Sind zwei Matrizen $\underline{A}$ und $\underline{B}$ ähnlich, so schreiben wir $\underline{A} \sim \underline{B}$. Es gilt also: $\underline{\tilde{A}} \sim \underline{A}$.

Bemerkung 6.7: Wird die Ähnlichkeitstransformation von $\underline{A}$ in $\underline{\tilde{A}}$ mit Hilfe von (6.61) vorgenommen, so ist offenbar auch $\underline{\tilde{A}}$ in $\underline{A}$ mit Hilfe einer Ähnlichkeitstransformation zu überführen, denn aus (6.61) entsteht mit $\underline{T}^{-1} = \underline{S}$

$$\underline{\tilde{A}} = \underline{S} \cdot \underline{A} \cdot \underline{S}^{-1} \Longleftrightarrow \underline{\tilde{A}} \cdot \underline{S} = \underline{S} \cdot \underline{A} \Longleftrightarrow \underline{S}^{-1} \cdot \underline{\tilde{A}} \cdot \underline{S} = \underline{A} \; .$$

Beispiel 6.10: Die Matrix $\underline{A}$ aus Beispiel 6.2 und Beispiel 6.7 soll einer Ähnlichkeitstransformation unterzogen werden, wobei als Transformationsmatrix

$$\underline{T} = \underline{X} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad (6.62)$$

aus (6.43) verwendet wird (Begründung in Abschnitt 6.6.3.). Zunächst sei $\underline{T}^{-1} = \underline{X}^{-1}$ ermittelt:

$$\det \underline{X} = -1 \Longrightarrow$$

$$\underline{X}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} . \qquad (6.63)$$

Daher ergibt sich $\underline{X}^{-1} \cdot \underline{A} \cdot \underline{X}$ mit Hilfe des Falkschen Schemas:

$$\underline{A}\left\{\left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & -6 & -3 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & -6 & -2 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right]\right\}\underline{X}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -4 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{array}$$

$\underline{X}^{-1}$ $\qquad$ $\underline{X}^{-1} \cdot \underline{A}$ $\qquad$ $\underline{X}^{-1} \cdot \underline{A} \cdot \underline{X}$

Also:

$$\underline{\tilde{A}} = \underline{X}^{-1} \cdot \underline{A} \cdot \underline{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} . \tag{6.64}$$

Hier ist das Ergebnis der Ähnlichkeitstransformation die Eigenwertmatrix $\underline{\Lambda}$ von (6.23).
Durch die Wahl anderer Transformationsmatrizen $\underline{T} \neq \underline{X}$ hätte man andere zur Matrix $\underline{A}$ ähnliche Matrizen $\underline{\tilde{A}}$ erhalten.

Im folgenden sollen zunächst einige Eigenschaften der Ähnlichkeitstransformation untersucht werden.

Satz 6.9: Ähnliche Matrizen besitzen gleichen Eigenwerte.

Beweis: Voraussetzung: Es gilt

$$\underline{A} \cdot \underline{x} = \lambda \underline{x} ,$$

also (6.18), und für die zu $\underline{A}$ ähnliche Matrix $\underline{\tilde{A}}$ die analoge Beziehung

$$\underline{\tilde{A}} \cdot \underline{\tilde{x}} = \tilde{\lambda} \underline{\tilde{x}} , \tag{6.65}$$

wobei zunächst angenommen werden soll, daß sich $\tilde{\lambda}$ von λ unterscheidet. In (6.65) wird (6.61) eingesetzt, so entsteht

$$\underline{T}^{-1} \cdot \underline{A} \cdot \underline{T} \cdot \underline{\tilde{x}} = \tilde{\lambda} \underline{\tilde{x}} \Longleftrightarrow \underline{A} \cdot \underline{T} \cdot \underline{\tilde{x}} = \tilde{\lambda} \underline{T} \cdot \underline{\tilde{x}} . \tag{6.66}$$

Im Ergebnis von (6.66) ist der Ausdruck $\underline{T} \cdot \underline{\tilde{x}}$ enthalten, den wir mit Hilfe von (6.59) durch $\underline{x}$ ersetzen können. Aus (6.66) ergibt sich dann

$$\underline{A} \cdot \underline{x} = \tilde{\lambda} \underline{x} .$$

Der Vergleich mit (6.11) (siehe Voraussetzung) läßt $\tilde{\lambda} = \lambda$ erkennen. ■

Satz 6.10: Ähnliche Matrizen besitzen die gleiche Anzahl (linear unabhängiger) Eigenvektoren.

Beweis: Zwischen den Eigenvektoren $\underline{x}$, für welche (6.11) gilt, und den Eigenvektoren $\tilde{\underline{x}}$ aus (6.65) besteht die Beziehung (6.59) wegen (6.60), (6.61) und (6.65). Die Gleichheit der Anzahl der jeweils existierenden Eigenvektoren ist somit offensichtlich, es bleibt nur zu zeigen, daß auch die Eigenvektoren $\tilde{\underline{x}}_i$ linear unabhängig sind, wenn es die $\underline{x}_i$ sind.
Wir beweisen durch Widerspruch.
Voraussetzungsgemäß gilt:

$$c_1 \underline{x}_1 + c_2 \underline{x}_2 + \ldots + c_n \underline{x}_n = \underline{o} \Longrightarrow c_k = 0 \text{ für } k = 1, \ldots, n$$

als Ausdruck der linearen Unabhängigkeit der Eigenvektoren $\underline{x}_1$ bis $\underline{x}_n$ (Satz 6.6). Wir nehmen an, daß die Eigenvektoren $\tilde{\underline{x}}_1$ bis $\tilde{\underline{x}}_n$ nicht linear unabhängig sind, daß also gilt
$a_1 \tilde{\underline{x}}_1 + a_2 \tilde{\underline{x}}_2 + \ldots + a_n \tilde{\underline{x}}_n = \underline{o}$ mit $a_k \neq 0$ für mindestens ein k.
Diese Annahme ist jedoch ein Widerspruch zur Voraussetzung, denn aus der Annahme folgt nach Multiplikation mit der Transformationsmatrix $\underline{T}$
$a_1 \underline{T} \cdot \tilde{\underline{x}}_1 + a_2 \underline{T} \cdot \tilde{\underline{x}}_2 + \ldots + a_n \underline{T} \cdot \underline{x}_n = \underline{o}$ mit $a_k \neq 0$ für mindestens einen k-Wert, und mit (6.59) ergibt sich
$a_1 \underline{x}_1 + a_2 \underline{x}_2 + \ldots + a_n \underline{x}_n = \underline{o}$ mit $a_k \neq 0$ für mindestens ein k.
Dies widerspricht der Voraussetzung. Damit ist der Satz bewiesen. ■

* Aufgabe 6.10: Führen Sie eine Ähnlichkeitstransformation der angegebenen Matrizen $\underline{A}$ und $\underline{B}$ unter Verwendung der ebenfalls angegebenen Transformationsmatrizen $\underline{T}$ und $\underline{S}$ durch! (Hinweis: Falksches Schema anwenden!)

a) $\underline{A} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -6 & -1 \end{bmatrix}$; $\underline{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$;

b) $\underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$; $\underline{S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$;

c) $\underline{A} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 4 & -5 & 4 \\ -6 & 9 & 0 \end{bmatrix}$; $\underline{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$;

d) $\underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$; $\underline{S} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

* Aufgabe 6.11:

a) Wenden Sie auf die Matrix

$$\underline{A} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 - 21\,j & -6\,j \\ 75\,j & -1 + 21\,j \end{bmatrix}$$

nacheinander zwei Ähnlichkeitstransformationen mit den Transformationsmatrizen

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \underline{T} = \begin{bmatrix} j & 1 \\ 1 & j \end{bmatrix}$$

in dieser Reihenfolge an (Falkschee Schema)! (Das heißt, berechnen Sie $B = S^{-1} \cdot A \cdot S$ und $\underline{T}^{-1} \cdot \underline{B} \cdot \underline{T}$!)

b) Berechnen Sie die Eigenwerte von $\underline{A}$ sowie die Eigenwerte der aus den Transformationen hervorgehenden Matrizen!

* Aufgabe 6.12: Berechnen Sie die Transformationsmatrix

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}$$

so, daß die Matrizen $\underline{A}$ und $\underline{\Lambda}$ Ähnlichkeitstransformierte im Sinne von $\underline{X}^{-1} \cdot \underline{A} \cdot \underline{X} = \underline{\Lambda}$ sind!

a) $\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$; $\underline{\Lambda} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$;

b) $\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; $\underline{\Lambda} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

c) Berechnen Sie die Spektralmatrix (Eigenwerte) und die Modalmatrix (Eigenvektoren) zur Matrix $\underline{A}$ in Aufgabe 6.12a!

d) Desgleichen zur Matrix $\underline{A}$ in Aufgabe 6.12b!

6.6.3. Hauptachsentransformation diagonalähnlicher Matrizen

Mit (6.64) ist die Matrix $\underline{A}$ in eine Diagonalmatrix transformiert worden. Dieser Fall der Ähnlichkeitstransformation ist der praktisch wichtigste.

Definition 6.7: Die Ähnlichkeitstransformation einer Matrix auf Diagonalform heißt Hauptachsentransformation der Matrix.

Nach Satz 6.9 besitzen zwei ähnliche Matrizen die gleichen Eigenwerte. Da entsprechend Beispiel 6.4 die Eigenwerte einer Diagonalmatrix in der Hauptdiagonalen dieser Matrix stehen, ist die Hauptachsentransformation einer Matrix $\underline{A}$ nichts anderes als die Ähnlichkeitstransformation auf die Spektralmatrix $\underline{\Lambda}$, also auf eine Matrix, in deren Hauptdiagonale die Eigenwerte λ_1, λ_2, ... stehen. Für diagonalähnliche Matrizen $\underline{A}$ gilt also

$$\underline{A} \sim \underline{\Lambda} \quad . \tag{6.67}$$

Beispiele hierzu sind bereits in (6.64) und Aufgabe 6.12 enthalten und werden durch das Beispiel 6.11 ergänzt.

Es bleibt zu untersuchen, wie man die Transformationsmatrix $\underline{T}$ bestimmt, so daß die Gleichung $\underline{T}^{-1} \cdot \underline{A} \cdot \underline{T} = \underline{\Lambda}$ gültig ist.

Satz 6.11: Die Transformationsmatrix, mit deren Hilfe diagonalähnliche Matrizen in ihre Spektralmatrix transformiert werden, besteht aus den n (linear unabhängigen) Eigenvektoren der Matrix, d. h.,

$$\underline{X}^{-1} \cdot \underline{A} \cdot \underline{X} = \underline{\Lambda} \tag{6.68}$$

mit $\underline{X} = \left[\underline{x}_1 \quad \underline{x}_2 \quad \underline{x}_3\right]$.

Beweis: Vorausgesetzt sei, daß eine diagonalähnliche Matrix $\underline{A}$ vorliegt, das heißt: es existieren n Vektorgleichungen von der Art (6.11) bzw. (6.38) für die n Eigenwerte λ_1, λ_2, ..., die nicht notwendig verschieden sein müssen:

$$\underline{A} \cdot \underline{x}_1 = \lambda_1 \underline{x}_1, \quad \underline{A} \cdot \underline{x}_2, \ \ldots, \ \underline{A} \cdot \underline{x}_n = \lambda_2 \underline{x}_2 \ . \tag{6.69}$$

Die in diesen Eigenwertproblemen enthaltenen n Eigenvektoren $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$, ..., $\underline{x}_n$ sind linear unabhängig (Sätze 6.6 und 6.8).

Auf den linken Seiten der Gleichungen (6.69) stehen die Vektoren $\underline{A} \cdot \underline{x}_i$, die, als Spalten einer Matrix dargestellt, zusammengefaßt werden:

$$\left[\underline{A} \cdot \underline{x}_1 \quad \underline{A} \cdot \underline{x}_2 \quad \underline{A} \cdot \underline{x}_3 \quad \cdots \quad \underline{A} \cdot \underline{x}_n\right] . \tag{6.70}$$

Dementsprechend müssen die rechten Seiten von (6.69) ebenfalls zu einer Matrix zusammengefaßt werden:

$$\left[\lambda_1 \underline{x}_1 \quad \lambda_2 \underline{x}_2 \quad \lambda_3 \underline{x}_3 \quad \cdots \quad \lambda_n \underline{x}_n\right] . \tag{6.71}$$

Entsprechend (6.69) sind (6.70) und (6.71) die beiden Seiten einer Matrizengleichung. Offensichtlich lassen sich nun (6.70) und (6.71) jeweils als ein Produkt zweier Matrizen darstellen:

$$\left[\underline{A} \cdot \underline{x}_1 \quad \underline{A} \cdot \underline{x}_2 \quad \cdots \quad \underline{A} \cdot \underline{x}_n\right] = \underline{A}\left[\underline{x}_1 \cdot \underline{x}_2 \quad \cdots \quad \underline{x}_n\right] = \underline{A} \cdot \underline{X} ,$$

$$\left[\lambda_1 \underline{x}_1 \quad \lambda_2 \underline{x}_2 \quad \cdots \quad \lambda_n \underline{x}_n\right]$$

$$= \left[\underline{x}_1 \cdot \underline{x}_2 \quad \cdots \quad \underline{x}_n\right] \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = \underline{X} \cdot \underline{\Lambda} ,$$

so daß wegen (6.69)

$$\underline{A} \cdot \underline{X} = \underline{X} \cdot \underline{\Lambda} \tag{6.72}$$

ntsteht. Durch linksseitige Multiplikation mit $\underline{X}^{-1}$ erhält man ie im Satz genannte Gleichung.
Satz 6.7 garantiert dabei die Existenz von $\underline{X}^{-1}$.) ■

Beispiel 6.11: Mit diesem Beispiel wird gleichzeitig der Beweis noch einmal illustriert. Das Problem entspricht der Aufgabe 6.12. Es soll die Hauptachsentransformation der Matrix $\underline{A}$ aus den Beispielen 6.2 und 6.7 mit einer zunächst nicht bekannten Transformationsmatrix

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}$$

vorgenommen werden. Die Eigenwertmatrix (Spektralmatrix) übernehmen wir aus (6.23). Die Transformationsgleichung

$\underline{X}^{-1} \cdot \underline{A} \cdot \underline{X} = \underline{\Lambda}$ wird durch linksseitige Multiplikation mit $\underline{X}$ auf die Form (6.72) gebracht, so daß nach Einsetzen von $\underline{A}$, $\underline{\Lambda}$ und $\underline{X}$ die Gleichung

$$\begin{bmatrix} 5 & -6 & -3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 4 & -6 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

entsteht. Multipliziert man die Produkte aus und vergleicht gemäß Definition 2.3 (1. Lehrbrief) die Elemente der beiden so entstehenden Produktmatrizen, so ergibt sich ein Gleichungssystem von neun Gleichungen für die neun Variablen $x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{33}$.
Man kann jedoch dieses System in drei Gleichungssysteme mit jeweils drei Gleichungen für jeweils drei Variablen zerlegen.
(Rechnen Sie diese Schritte nach!)

(I):

$$5x_{11} - 6x_{21} - 3x_{31} = x_{11}$$
$$2x_{11} - x_{21} - 2x_{31} = x_{21}$$
$$4x_{11} - 6x_{21} - 2x_{31} = x_{31}$$

(II):

$$5x_{12} - 6x_{22} - 3x_{32} = 2x_{12}$$
$$2x_{12} - x_{22} - 2x_{32} = 2x_{22}$$
$$4x_{12} - 6x_{22} - 2x_{32} = 2x_{32}$$

(III):

$$5x_{13} - 6x_{23} - 3x_{33} = -x_{13}$$
$$2x_{13} - x_{23} - 2x_{33} = -x_{23}$$
$$4x_{13} - 6x_{23} - 2x_{33} = -x_{33}$$

Hiermit sind drei homogene Gleichungssysteme entstanden.

(I):

$$4x_{11} - 6x_{21} - 3x_{31} = 0$$
$$2x_{11} - 2x_{21} - 2x_{31} = 0$$
$$4x_{11} - 6x_{21} - 3x_{31} = 0$$

(II):

$$3x_{12} - 6x_{22} - 3x_{32} = 0$$
$$2x_{12} - 3x_{22} - 2x_{32} = 0$$
$$4x_{12} - 6x_{22} - 4x_{32} = 0$$

(III):

$$6x_{13} - 6x_{23} - 3x_{33} = 0$$
$$2x_{13} - 2x_{33} = 0$$
$$4x_{13} - 6x_{23} - x_{33} = 0$$

Auf den linken Seiten der Gleichungen (6.69) stehen die Vektoren $\underline{A} \cdot \underline{x}_i$, die, als Spalten einer Matrix dargestellt, zusammengefaßt werden:

$$\left[\underline{A} \cdot \underline{x}_1 \quad \underline{A} \cdot \underline{x}_2 \quad \underline{A} \cdot \underline{x}_3 \quad \cdots \quad \underline{A} \cdot \underline{x}_n\right] . \tag{6.70}$$

Dementsprechend müssen die rechten Seiten von (6.69) ebenfalls zu einer Matrix zusammengefaßt werden:

$$\left[\lambda_1 \underline{x}_1 \quad \lambda_2 \underline{x}_2 \quad \lambda_3 \underline{x}_3 \quad \cdots \quad \lambda_n \underline{x}_n\right] . \tag{6.71}$$

Entsprechend (6.69) sind (6.70) und (6.71) die beiden Seiten einer Matrizengleichung. Offensichtlich lassen sich nun (6.70) und (6.71) jeweils als ein Produkt zweier Matrizen darstellen:

$$\left[\underline{A} \cdot \underline{x}_1 \quad \underline{A} \cdot \underline{x}_2 \quad \cdots \quad \underline{A} \cdot \underline{x}_n\right] = \underline{A} \left[\underline{x}_1 \cdot \underline{x}_2 \quad \cdots \quad \underline{x}_n\right] = \underline{A} \cdot \underline{X} ,$$

$$\left[\lambda_1 \underline{x}_1 \quad \lambda_2 \underline{x}_2 \quad \cdots \quad \lambda_n x_n\right]$$

$$= \left[\underline{x}_1 \cdot \underline{x}_2 \quad \cdots \quad \underline{x}_n\right] \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = \underline{X} \cdot \underline{\Lambda} ,$$

so daß wegen (6.69)

$$\underline{A} \cdot \underline{X} = \underline{X} \cdot \underline{\Lambda} \tag{6.72}$$

entsteht. Durch linksseitige Multiplikation mit $\underline{X}^{-1}$ erhält man die im Satz genannte Gleichung.
(Satz 6.7 garantiert dabei die Existenz von $\underline{X}^{-1}$.) ■

Beispiel 6.11: Mit diesem Beispiel wird gleichzeitig der Beweis noch einmal illustriert. Das Problem entspricht der Aufgabe 6.12. Es soll die Hauptachsentransformation der Matrix $\underline{A}$ aus den Beispielen 6.2 und 6.7 mit einer zunächst nicht bekannten Transformationsmatrix

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}$$

vorgenommen werden. Die Eigenwertmatrix (Spektralmatrix) übernehmen wir aus (6.23). Die Transformationsgleichung

$\underline{X}^{-1} \cdot \underline{A} \cdot \underline{X} = \underline{\Lambda}$ wird durch linksseitige Multiplikation mit $\underline{X}$ auf die Form (6.72) gebracht, so daß nach Einsetzen von $\underline{A}$, $\underline{\Lambda}$ und $\underline{X}$ die Gleichung

$$\begin{bmatrix} 5 & -6 & -3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 4 & -6 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

entsteht. Multipliziert man die Produkte aus und vergleicht gemäß Definition 2.3 (1. Lehrbrief) die Elemente der beiden so entstehenden Produktmatrizen, so ergibt sich ein Gleichungssystem von neun Gleichungen für die neun Variablen $x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{33}$. Man kann jedoch dieses System in drei Gleichungssysteme mit jeweils drei Gleichungen für jeweils drei Variablen zerlegen. (Rechnen Sie diese Schritte nach!)

(I):

$$\begin{aligned} 5x_{11} - 6x_{21} - 3x_{31} &= x_{11} \\ 2x_{11} - x_{21} - 2x_{31} &= x_{21} \\ 4x_{11} - 6x_{21} - 2x_{31} &= x_{31} \end{aligned}$$

(II):

$$\begin{aligned} 5x_{12} - 6x_{22} - 3x_{32} &= 2x_{12} \\ 2x_{12} - x_{22} - 2x_{32} &= 2x_{22} \\ 4x_{12} - 6x_{22} - 2x_{32} &= 2x_{32} \end{aligned}$$

(III):

$$\begin{aligned} 5x_{13} - 6x_{23} - 3x_{33} &= -x_{13} \\ 2x_{13} - x_{23} - 2x_{33} &= -x_{23} \\ 4x_{13} - 6x_{23} - 2x_{33} &= -x_{33} \end{aligned}$$

Hiermit sind drei homogene Gleichungssysteme entstanden.

(I):

$$\begin{aligned} 4x_{11} - 6x_{21} - 3x_{31} &= 0 \\ 2x_{11} - 2x_{21} - 2x_{31} &= 0 \\ 4x_{11} - 6x_{21} - 3x_{31} &= 0 \end{aligned}$$

(II):

$$\begin{aligned} 3x_{12} - 6x_{22} - 3x_{32} &= 0 \\ 2x_{12} - 3x_{22} - 2x_{32} &= 0 \\ 4x_{12} - 6x_{22} - 4x_{32} &= 0 \end{aligned}$$

(III):

$$\begin{aligned} 6x_{13} - 6x_{23} - 3x_{33} &= 0 \\ 2x_{13} - 2x_{33} &= 0 \\ 4x_{13} - 6x_{23} - x_{33} &= 0 \end{aligned}$$

Die Berechnung der Variablen erfolgt über den Gaußschen Algorithmus. Da aber das System (I) für die drei Variablen x_{11}, x_{21}, x_{31} bereits mit (6.39) gegeben und dort innerhalb von Beispiel 6.7 auch ausgewertet worden ist, kann das Ergebnis (6.40) als Lösung für das Gleichungssystem (I) übernommen werden. Diese Lösung ist aber genau der Eigenvektor $\underline{x}_1$ zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$, wie in Beispiel 6.7 dargelegt. Ebenso erhält man als Lösung für die Gleichungssysteme (II) und (III) die Eigenvektoren (6.41) und (6.42). Mithin ist die Eigenvektor- oder Modalmatrix $\underline{X}$ gleichzeitig die Transformationsmatrix für die Hauptachsentransformation von $\underline{A}$.

Auch für diagonalähnliche Matrizen mit teilweise mehrfachen Eigenwerten (wie in Beispiel 6.8, Abschnitt 6.5.2.) findet man die Transformationsmatrix $\underline{X}$ für die Hauptachsentransformation auf diese Weise.

Beispiel 6.12: Aus (6.47) und der mit Hilfe von (6.48) aufzustellenden Spektralmatrix

$$\underline{\Lambda} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

ergibt sich nach Einsetzen in die der Transformationsgleichung $\underline{X}^{-1} \cdot \underline{B} \cdot \underline{X} = \underline{\Lambda}$ entsprechende Gleichung $\underline{B} \cdot \underline{X} = \underline{X} \cdot \underline{\Lambda}$ die Matrizengleichung

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

Werden hier die Matrizenmultiplikationen ausgeführt, die entsprechenden Elemente der beiden entstehenden Produktmatrizen verglichen und die so entstehenden neun Gleichungen nach den Variablen aufgelöst, so ergeben sich analog zu den drei Gleichungssystemen (I), (II) und (III) in Beispiel 6.10 die folgenden Systeme (dies sollte nachgerechnet werden):

(I):

x_{11}	x_{21}	x_{31}	1
-4	2	-2	0
2	-1	1	0
-2	1	-1	0 ,

(II):

x_{12}	x_{22}	x_{32}	1
-4	2	-2	0
2	-1	1	0
-2	1	-1	0 ,

(III):

x_{13}	x_{23}	x_{33}	1
2	2	-2	0
2	5	1	0
-2	1	5	0 .

Gegenüber Beispiel 6.11 sind hier die Gleichungssyteme (I) und (II), die beide dem 2fachen λ-Wert $\lambda_1 = 1$ zugeordnet sind, identisch. Das Gleichungssystem (II) liefert also Lösungen, die linear abhängig von denen des Systems (I) sind.
Wir benötigen aber nur linear unabhängige Lösungen, da für die Hauptachsentransformation $\underline{X}^{-1}$ benötigt wird, also det $\underline{X} \neq 0$ gefordert werden muß. Diese Forderung ist nur gewährleistet, wenn die Spalten von $\underline{X}$ (und die Zeilen), also die Lösungen der Gleichungssysteme (I), (II), (III) linear unabhängig sind. Wir verzichten daher auf das Gleichungssystem (II) und berechnen nur die Lösungen von (I) und (III). In Beispiel 6.8 ist diese Berechnung bereits durchgeführt worden; als Ergebnis erhält man die Eigenvektoren, die somit als Spalten der Transformationsmatrix verwendet werden müssen.

Bemerkung 6.8: Es ist nunmehr offensichtlich, weshalb Matrizen vom Typ (n,n) mit n (linear unabhängigen) Eigenvektoren als diagonalähnlich bezeichnet werden.

Bemerkung 6.9: Bei Vorliegen nichtdiagonalähnlicher Matrizen ist es nicht möglich, zu den mehrfachen Eigenwerten eine hinreichende Anzahl (linear unabhängiger) Eigenvektoren zu erhalten. Ein Beispiel hierfür ist die Matrix $\underline{C}$ in Beispiel 6.9. Eine Transformationsmatrix zwecks Ähnlichkeitstransformation auf Diagonalform kann also auf dem in den Beispielen 6.11 und 6.12 vorgezeichneten Wege nicht gefunden werden. Um die zu einer gegebenen Matrix ähnliche Diagonalmatrix anzugeben, genügt es also bei Existenz mehrfacher Eigenwerte nicht, die λ-Werte in Form einer Diagonalmatrix $\underline{\Lambda}$ anzugeben, sondern es muß auch festgestellt werden, ob es möglich ist, zu den mehrfachen Eigenwerten eine hinreichende Anzahl linear unabhängiger Eigenvektoren zu erhalten. Dazu genügt eine Rangbestimmung der zu lösenden Gleichungssysteme.

Mit den folgenden beiden letzten Beispielen dieses Abschnittes werden zwei Ziele verfolgt:

1. Es soll gezeigt werden, daß man bei komplexen Matrizen, Eigenvektoren oder Eigenwerten völlig analog zu den bisherigen Beispielen vorgeht.

2. Gegenüber den bisherigen Beispielen wird in den beiden folgenden Beispielen auf Illustrationen verzichtet, und es werden nur diejenigen Schritte nochmals zusammengestellt, die zum

Nachweis der Diagonalähnlichkeit einer gegebenen Matrix vom Typ (3,3) notwendig sind.

Beispiel 6.13: Es ist zu prüfen, ob die Matrix

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & j \\ 0 & 1 & 0 \\ -j & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{6.73}$$

diagonalähnlich ist. Die charakteristische Gleichung

$$\det(\underline{A} - \lambda \underline{E}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & j \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -j & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 - (1-\lambda)$$
$$= (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda) = 0$$

liefert die Lösungen $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$.

Da diese Lösungen einfach sind, existieren drei linear unabhängige Eigenvektoren, d. h., $\underline{A}$ ist diagonalähnlich.

Beispiel 6.14: Es ist anzugeben, ob sich die Matrix

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & -j & 0 \\ 1 & 0 & -j \\ -j & -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{6.74}$$

auf Diagonalform transformieren läßt.
Die charakteristische Gleichung

$$\det(\underline{A} - \lambda \underline{E}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -j & 0 \\ 1 & -\lambda & -j \\ -j & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 (1-\lambda) = 0$$

liefert die Eigenwerte $\lambda_{1,2} = 0$ (zweifach), $\lambda_3 = 1$.

Die Eigenvektoren zum zweifachen Eigenwert werden aus folgendem Gaußschen Schema ermittelt:

	x_{11}	x_{21}	x_{31}	1
(*)	1	-j	0	0
-1|	1	0	-j	0
j|	-j	-1	0	0
(*)	0	-j	-j	0
(*)	0	0	0	0 .

Die drei (*)-Gleichungen (Dreieckesystem, vgl. z. B. 2. Lehrbrief, (3.5) in Beispiel 3.10)) besitzen den Rang r = 2; daher ist

$k = n - r = 3 - 2 = 1$, d. h. nur eine Variable frei wählbar (vgl. Satz 3.2, 2. Lehrbrief), und somit existiert zum zweifachen Eigenwert $\lambda = 0$ nur ein Eigenvektor. Deshalb ist diese Matrix $\underline{A}$ nicht diagonalähnlich.

* Aufgabe 6.13: Untersuchen Sie, ob die folgenden Matrizen auf Diagonalform transformiert werden können, und geben Sie die Spektralmatrizen in diesen Fällen an!

a) $\underline{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ b) $\underline{B} = \begin{bmatrix} -5 & -2 & -8 \\ 39 & 18 & 47 \\ -8 & -4 & -8 \end{bmatrix}$

c) $\underline{C} = \begin{bmatrix} 0 & -6 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ d) $\underline{D} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & j \cdot \sin\varphi \\ -j \cdot \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$

e) $\underline{H} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 + j & 0 & j \\ -2\,j & j & 0 \end{bmatrix}$ f) $\underline{F} = \begin{bmatrix} 3 & -1 + 2\,j & 2 + j \\ -1 - 2\,j & -1 & -j \\ 2 - j & j & 2 \end{bmatrix}$

6.6.4. Unitäre bzw. orthogonale Hauptachsentransformation

Wird die Ähnlichkeitstransformation einer quadratischen Matrix $\underline{A}$ mittels unitärer (bzw. orthogonaler) Transformationsmatrix vorgenommen, so sprechen wir von einer unitären (bzw. orthogonalen) Ähnlichkeitstransformation. In der Ähnlichkeitstransformation (6.61) ist demnach die Transformationsmatrix $\underline{T}$ durch die unitäre Matrix $\underline{U}$ mit der Eigenschaft $\underline{U}^{-1} = \underline{U}^{*}$ (vgl. Definition 2.19, 1. Lehrbrief) zu ersetzen:

$$\tilde{\underline{A}} = \underline{U}^{*} \cdot \underline{A} \cdot \underline{U} \,. \tag{6.75}$$

Enthält die Matrix $\underline{U}$ nur reelle Elemente, so ist die Eigenschaft, unitär zu sein, gleichbedeutend mit der Eigenschaft, orthogonal zu sein, so daß die unitäre Ähnlichkeitstransformation eine orthogonale Ähnlichkeitstransformation genannt wird und (6.75) in die Beziehung

$$\tilde{\underline{A}} = \underline{U}^{T} \cdot \underline{A} \cdot \underline{U} \tag{6.76}$$

übergeht (vgl. auch Definition 2.17, 1. Lehrbrief).
Im folgenden seien nur die komplexen Matrizen betrachtet, der

Fall reeller Matrizen ist darin (s. o.) ohnehin enthalten. Die Bezeichnungen für den Fall reeller Matrizen werden wir in Klammern mit hinzusetzen.

Es ist zu fragen, welche speziellen Fälle dazu führen, daß die Transformationsmatrix $\underline{X}$ unitär (orthogonal) wird, d. h., daß je zwei unterschiedliche Spaltenvektoren dieser Matrix (Eigenvektoren der Matrix $\underline{A}$) unitär (orthogonal) werden, während für die Beträge dieser Spaltenvektoren 1 entstehen muß. Die Antwort lautet, daß die Matrix $\underline{A}$ selbst hermitesch (symmetrisch) sein muß, dann gibt es eine unitäre (orthogonale) Matrix $\underline{X} = \underline{U}$, die die Matrix $\underline{A}$ auf Hauptachsen, d. h. in eine Diagonalmatrix, transformiert. Wir wollen uns daher zunächst mit einigen Besonderheiten hermitescher (symmetrischer) Matrizen auseinandersetzen, bevor dieser Sachverhalt genauer formuliert wird (vgl. Satz 6.15).

Satz 6.12: Die Eigenwerte hermitescher (symmetrischer) Matrizen sind stets reell.

Beweis: Voraussetzung: $\underline{A} \cdot \underline{x} = \lambda \underline{x}$ nach Gl. (6.11) und $\underline{A}^* = \underline{A}$ nach Gl. (2.50) (Lehrbrief 1). Die adjungierte Form der zuerst genannten Gleichung (6.11) lautet:

$$\underline{x}^* \cdot \underline{A}^* = \bar{\lambda}\, \underline{x}^* \Longleftrightarrow \underline{x}^* \cdot \underline{A} = \bar{\lambda}\, \underline{x}^* \,. \tag{6.77}$$

$\bar{\lambda}$ ist darin die konjugiert komplexe Zahl zu λ.
Die letzte Gleichung in (6.77) erhält man mit $\underline{A}^* = \underline{A}$ aus der ersten. Nach Skalarmultiplikation von (6.77) mit $\underline{x}$ von rechts entsteht

$$\underline{x}^* \cdot \underline{A} \cdot \underline{x} = \bar{\lambda}\, \underline{x}^* \cdot \underline{x} \,. \tag{6.78}$$

Multiplizieren wir andererseits die Ausgangsgleichung (6.11) mit $\underline{x}^*$ von links ($\underline{x}^* \cdot \underline{A} \cdot \underline{x} = \lambda\, \underline{x}^* \cdot \underline{x}$) und subtrahieren diese Gleichung von (6.78), so ergibt sich

$$0 = (\bar{\lambda} - \lambda)\, \underline{x}^* \cdot \underline{x} = (\bar{\lambda} - \lambda)\, |\underline{x}|^2 \,.$$

Da der Betrag des Eigenvektors $\underline{x}$ positiv ist, kann diese Beziehung nur für

$$\bar{\lambda} = \lambda \tag{6.79}$$

gültig sein. Diese Eigenschaft ($\bar{\lambda} = \lambda$) besitzen nur reelle Zahlen. ■

Eine Vielzahl bereits berechneter Beispiele und Aufgaben können

zur Illustration dieses Satzes dienen, wobei sowohl hermitesche als auch symmetrische Matrizen (als Spezialfall hermitescher Matrizen) Beachtung finden sollten:
Beispiel 6.4 (symmetrisch), Beispiel 6.8 (symmetrisch), Beispiel 6.13 (hermitesch), Aufgabe 6.4b (hermitesch), Aufgabe 6.9a, b (symmetrisch), Aufgabe 6.9e (hermitesch), Aufgabe 6.12b (symmetrisch), Aufgabe 6.13f (hermitesch). Gegenbeispiele sind Beispiel 6.6, Beispiel 6.14, Aufgabe 6.4a, Aufgabe 6.9d.

Bemerkung 6.10: Es ist anzumerken, daß die Hermitezität einer Matrix $\underline{A}$ eine hinreichende Bedingung ist für die Aussage, daß alle Eigenwerte reell sind, es ist keine notwendige Bedingung, das heißt,
es gilt zwar

$$\underline{A} \text{ hermitesch} \Longrightarrow \lambda_k \text{ reell},$$

aber nicht das Umgekehrte (daher ist der folgende Implikationspfeil durchgestrichen):

$$\lambda_k \text{ reell} \not\Longrightarrow \underline{A} \text{ hermitesch}.$$

Es existieren auch Matrizen $\underline{A}$ mit ausschließlich reellen Eigenwerten, die nicht symmetrisch oder hermitesch sind (Beispiel 6.1, Beispiel 6.10, Aufgabe 6.6, Aufgabe 6.7).

Satz 6.13: Die zu verschiedenen Eigenwerten gehörigen Eigenvektoren einer hermiteschen (symmetrischen) Matrix sind unitär (orthogonal).

Beweis: Voraussetzung: Es gelte $\underline{A} \cdot \underline{x}_i = \lambda_i \underline{x}_i$ und $\underline{A} \cdot \underline{x}_k = \lambda_k \underline{x}_k$ entsprechend (6.38) mit $\lambda_i \neq \lambda_k$.
Linksseitige Multiplikation der ersten vorausgesetzten Gleichung mit $\underline{x}_k^*$ ergibt

$$\underline{x}_k^* \cdot \underline{A} \cdot \underline{x}_i = \lambda_i \underline{x}_k^* \cdot \underline{x}_i . \tag{6.80}$$

Andererseits seien von beiden Seiten der zweiten, in der Voraussetzung genannten Gleichung die adjungierten Formen gebildet, d. h.,

$$(\underline{A} \cdot \underline{x}_k)^* = (\lambda_k \underline{x}_k)^* .$$

Die linke Seite dieser Gleichung wird entsprechend Gleichung (2.49), 1. Lehrbrief, in $\underline{x}_k^* \cdot \underline{A}^*$ umgeformt, wofür wegen der Hermitezität von $\underline{A}$ auch $\underline{x}_k^* \cdot \underline{A}$ eingesetzt werden kann. Die rechte Seite ist als

$\bar{\lambda}_k \, \underline{x}_k^*$ zu schreiben, wobei nach Satz 6.13 $\bar{\lambda}_k = \lambda_k$ zu berücksichtigen ist. So ergibt sich aus der letzten Gleichung

$$\underline{x}_k^* \cdot \underline{A} = \lambda_k \, \underline{x}_k^* \, .$$

Rechtsseitige Multiplikation dieser Gleichung mit $\underline{x}_i$ führt auf

$$\underline{x}_k^* \cdot \underline{A} \cdot \underline{x}_i = \lambda_k \, \underline{x}_k^* \cdot \underline{x}_i \, . \qquad (6.81)$$

Durch Subtraktion der Gleichung (6.81) von Gleichung (6.80) erhält man

$$0 = (\lambda_i - \lambda_k) \, \underline{x}_k^* \cdot \underline{x}_i \, ,$$

woraus wegen der Voraussetzung $\lambda_i \neq \lambda_k$ nur $\underline{x}_k^* \cdot \underline{x}_i = 0$ folgen kann. Die Eigenvektoren $\underline{x}_k$ und $\underline{x}_i$ sind daher nach Definition 6.2 unitär orthogonal. ■

Beispiel 6.15: Zunächst untersuchen wir die Eigenvektoren der symmetrischen Matrix $\underline{B}$ aus Beispiel 6.8 für verschiedene λ daraufhin, ob sie orthogonal sind: Das Skalarprodukt der Eigenvektoren $\underline{x}_1$ und $\underline{x}_3$ aus (6.50) und (6.52) ergibt

$$\underline{x}_1^T \cdot x_3 = [1 \quad 2 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \, .$$

Für das Skalarprodukt aus $\underline{x}_2$ und $\underline{x}_3$ erhält man

$$\underline{x}_2^T \cdot \underline{x}_3 = [0 \quad 1 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \, .$$

Beispiel 6.16: Die Eigenvektoren der hermiteschen Matrix $\underline{A}$ aus Beispiel 6.13 müssen erst noch berechnet werden, bevor das Skalarprodukt überprüft werden kann. Die drei Gleichungssysteme $\underline{A} \cdot \underline{x}_i = \lambda_i \, \underline{x}_i$ für die in Beispiel 6.13 bereits berechneten Eigenwerte λ_i ergeben die folgenden Eigenvektoren:

a) $\lambda_1 = 0$:

	x_{11}	x_{21}	x_{31}	1
(*)	1	0	j	0
(*)	0	1	0	0
j|	-j	0	1	0
(*)	0	0	0	0

$\Longrightarrow \; x_{31} = t, \; x_{21} = 0, \; x_{11} = -j \, x_{31} = -j \, t \; \Longrightarrow \; \underline{x}_1 = \begin{bmatrix} -j \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

b) $\lambda_2 = 1$:

x_{12}	x_{22}	x_{32}	1
0	0	j	0
0	0	0	0
-j	0	0	0

$\Longrightarrow$ $x_{32} = 0$, $x_{12} = 0$, $x_{22} = t$ $\Longrightarrow$ $x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

c) $\lambda_3 = 2$:

	x_{13}	x_{23}	x_{33}	1
(*)	-1	0	j	0
(*)	0	-1	0	0
-j|	-j	0	-1	0
(*)	0	0	0	0

$\Longrightarrow$ $x_{33} = t$, $x_{23} = 0$, $x_{13} = j\, x_{33} = j\, t$ $\Longrightarrow$ $\underline{x}_3 = \begin{bmatrix} j \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Die Skalarprodukte dieser drei Eigenvektoren ergeben

$$\underline{x}_1^* \cdot \underline{x}_2 = \begin{bmatrix} j & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0; \quad \underline{x}_1^* \cdot \underline{x}_3 = \begin{bmatrix} j & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} j \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 ,$$

$$\underline{x}_3^* \cdot \underline{x}_2 = \begin{bmatrix} -j & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 .$$

Bemerkung 6.11: Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß Matrizen $\underline{U}$ nur dann unitär sein können, wenn deren Spaltenvektoren unitär orthogonal und normiert sind. Diese Bedingung sei durch Angabe eines Gegenbeispiels noch illustriert. Gegeben sei eine Matrix $\underline{U}$ vom Typ (3,3), d. h., sie enthalte die drei dreidimensionalen Spaltenvektoren $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$, $\underline{x}_3$, die unitär, aber nicht normiert seien. Dann gelten zunächst die folgenden Beziehungen:

$$\underline{U} = \begin{bmatrix} \underline{x}_1 & \underline{x}_2 & \underline{x}_3 \end{bmatrix}; \quad \underline{U}^* = \begin{bmatrix} \underline{x}_1^* \\ \underline{x}_2^* \\ \underline{x}_3^* \end{bmatrix},$$

d. h., $\underline{U}^*$ besteht aus den drei Zeilenvektoren $\underline{x}_1^*$, $\underline{x}_2^*$, $\underline{x}_3^*$, wenn $\underline{U}$ aus den drei Spaltenvektoren $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$, $\underline{x}_3$ gebildet wird.

Offenbar gilt nun für $\underline{x}_i^* \cdot \underline{x}_k = 0$ $(i \neq k)$, d. h. für Unitarität der Spaltenvektoren,

$$\underline{U}^* \cdot \underline{U} = \begin{bmatrix} \underline{x}_1^* \\ \underline{x}_2^* \\ \underline{x}_3^* \end{bmatrix} \cdot [\underline{x}_1 \quad \underline{x}_2 \quad \underline{x}_3] = \begin{bmatrix} |\underline{x}_1|^2 & 0 & 0 \\ 0 & |\underline{x}_2|^2 & 0 \\ 0 & 0 & |\underline{x}_3|^2 \end{bmatrix}, \quad (6.82)$$

wobei wieder Gleichung (6.4) zur Anwendung gekommen ist.

Gleichung (6.82) entspricht nur dann der Gleichung (2.52), 1. Lehrbrief, deren Gültigkeit für unitäre Matrizen zu fordern ist, wenn die Spaltenvektoren $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$, $\underline{x}_3$ normiert sind und (6.82) somit eine Einheitsmatrix darstellt.

Für die unitäre Ähnlichkeitstransformation hermitescher (orthogonale Ähnlichkeitstransformation symmetrischer) Matrizen gilt

Satz 6.14: Die unitäre (orthogonale) Transformation einer hermiteschen (symmetrischen) Matrix $\underline{A}$ ergibt wieder eine hermitesche (symmetrische) Matrix.

Beweis: Voraussetzung: $U^* = U^{-1}$ (unitär) und $\underline{A}^* = \underline{A}$ (hermitesch). Dann gilt mit $\underline{B} = \underline{U}^* \cdot \underline{A} \cdot \underline{U}$ entsprechend (6.75) offenbar

$$\underline{B}^* = (\underline{U}^* \cdot \underline{A} \cdot \underline{U})^* = \underline{U}^* \cdot (\underline{U}^* \cdot \underline{A})^* = \underline{U}^* \cdot \underline{A}^* \cdot \underline{U}^{**}.$$

Dabei wurde Gleichung (2.49), 1. Lehrbrief, verwendet. Wegen $\underline{U}^{**} = \underline{U}$ und $\underline{A}^* = \underline{A}$ nach Voraussetzung ergibt sich

$$\underline{B}^* = \underline{U}^* \cdot \underline{A} \cdot \underline{U} = \underline{B},$$

eine Gleichung, welche besagt, daß $\underline{B}$ hermitesch ist. ■

Bemerkung 6.12: Wir entnehmen diesen Sätzen für hermitesche Matrizen also, daß jede unitäre Transformation der hermiteschen Matrix $\underline{A}$, also auch die unitäre Hauptachsentransformation, d. h. auch die unitäre Transformation einer Matrix in die zur Matrix $\underline{A}$ ähnliche Diagonalform, eine hermitesche Matrix $\underline{\Lambda}$ ergibt. Daher liegt die Vermutung nahe, daß hermitesche Matrizen immer auf die Diagonalform ihrer Eigenwerte, unabhängig von der Vielfachheit der Eigenwerte, als Lösung des charakteristischen Polynoms unitär transformiert werden können. Diese Vermutung erweist sich als richtig. Wir kleiden sie in den folgenden Satz, auf dessen Beweis wir verzichten. Interessierte Leser finden ihn beispielsweise in /4/.

Satz 6.15: Eine hermitesche (symmetrische) Matrix kann immer unitär auf Hauptachsen transformiert werden.

Hiermit zusammenhängend gilt auch der

Satz 6.16: Zu einem s-fachen Eigenwert einer hermiteschen Matrix gehören immer s (linear unabhängige) Eigenvektoren, das heißt, eine hermitesche (symmetrische) Matrix ist immer diagonalähnlich.

Beispiel 6.17: Es ist zu untersuchen, ob die Matrix

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 - j\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 + j\sqrt{3} & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

diagonalähnlich ist. Die Antwort ist sofort mit der Bildung von $\underline{A}^*$,

$$\underline{A}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 + j\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 - j\sqrt{3} & 0 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 - j\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 + j\sqrt{3} & 0 & 4 \end{bmatrix} = \underline{A},$$

und Satz 6.15 gegeben: Offenbar gilt $\underline{A}^* = \underline{A} \Longrightarrow \underline{A}$ ist hermitesch $\Longrightarrow$ A ist diagonalähnlich.
Damit ist die gestellte Aufgabe gelöst. Hier soll zur Erläuterung von insbesondere Gleichung (6.75), Bemerkung 6.11, Satz 6.11, Satz 6.13 und Satz 6.16 die Ähnlichkeitstransformation (Gleichung (6.75)) einschließlich der Berechnung der unitären Transformationsmatrix $\underline{U}$ noch einmal durchgeführt werden.
Aus der charakteristischen Gleichung

$$\det(\underline{A} - \lambda \underline{E}) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & 1 - j\sqrt{3} \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 1 + j\sqrt{3} & 0 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 (5 - \lambda) = 0 \quad (6.83)$$

ergeben sich der zweifache Eigenwert $\lambda_{1,2} = 0$ und der einfache Eigenwert $\lambda_3 = 5$, die gemäß Satz 6.12 sämtlich reell sind.

Die Eigenvektoren zum zweifachen Eigenwert $\lambda_{1,2} = 0$ erhält man aus dem Koeffizientenschema in (6.83) nach Einsetzen von $\lambda = 0$:

	x_1	x_2	x_3	1	
(*)	1	0	$1 - j\sqrt{3}$	0	$x_3 = s,$
(*)	0	0	0	0	$\Longrightarrow x_2 = t,$
$-1 - j\sqrt{3}$	$1 + j\sqrt{3}$	0	4	0	$x_1 = (-1 + j\sqrt{3})\, s.$
(*)	0	0	0	0	

Wir finden, wie es entsprechend Satz 6.16 zu erwarten ist, für den 2fachen Eigenwert zwei linear unabhängige Eigenvektoren, indem wir zunächst s = 0, t = 1 und danach s = 1, t = 0 verwenden:

$$\underline{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \underline{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 + j\sqrt{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{6.84}$$

Es ist darauf aufmerksam zu machen, daß diese beiden Eigenvektoren bereits unitär sind: $\underline{x}_1^* \cdot \underline{x}_2 = \underline{x}_2^* \cdot \underline{x}_1 = 0$.

Das ist aber eine Besonderheit dieses Beispiels. In der Regel sind die linear unabhängigen Eigenvektoren zu einem mehrfachen Eigenwert nicht unitär. Durch ein besonderes Verfahren, das Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren, werden wir später in der Lage sein, nicht unitäre Eigenvektoren durch unitäre Eigenvektoren zu ersetzen (Abschnitt 6.7.).

Darüber hinaus benötigen wir für die unitäre Transformationsmatrix $\underline{U}$ gemäß Bemerkung 6.11 normierte Eigenvektoren, die sich aus (6.84) mit (6.4) und (4.8), 3. Lehrbrief, zu

$$\underline{x}_{1n} = \underline{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \underline{x}_{2n} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -1 + j\sqrt{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{6.85}$$

ergeben.

Den Eigenvektor zum einfachen Eigenwert $\lambda_3 = 5$ berechnet man aus dem in (6.83) enthaltenen Koeffizientenschema:

	x_{13}	x_{23}	x_{33}	1	
$1 - j\sqrt{3}$	−4	0	$1 - j\sqrt{3}$	0	$x_{33} = 4\,t$
(*)	0	−5	0	0	$\Longrightarrow x_{23} = 0$
(*)	$1 + j\sqrt{3}$	0	−1	0	$x_{13} = \frac{1 - j\sqrt{3}}{4} \cdot 4\,t$
(*)	0	0	0	0	$= (1 - j\sqrt{3})\, t.$

Der normierte Eigenvektor (Bemerkung 6.11) hat somit die Form

$$\underline{x}_{3n} = \frac{1}{\sqrt{20}} \begin{bmatrix} 1 - j\sqrt{3} \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}. \qquad (6.86)$$

Selbstverständlich ist dieser Eigenvektor unitär zu jenen aus Gleichung (6.85), wie es Satz 6.13 (für verschiedene Eigenwerte) erfordert.

Aus (6.85) und (6.86) stellen wir die unitäre Transformationsmatrix

$$\underline{U} = \left[\underline{x}_{1n} \quad \underline{x}_{2n} \quad \underline{x}_{3n}\right] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1 + j\sqrt{3}}{\sqrt{5}} & \frac{1 - j\sqrt{3}}{\sqrt{20}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{\sqrt{20}} \end{bmatrix} \qquad (6.87)$$

zusammen.

Die unitäre Hauptachsentransformation $\underline{U}^* \cdot \underline{A} \cdot \underline{U}$ erfolgt dann mit Hilfe des Falkschen Schemas:

			$\underline{A}$			$\underline{U}$		
			1	0	$1-j\sqrt{3}$	0	$\frac{-1+j\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$	$\frac{1-j\sqrt{3}}{\sqrt{20}}$
			0	0	0	1	0	0
			$1+j\sqrt{3}$	0	4	0	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\frac{4}{\sqrt{20}}$
0	1	0	0	0	0	0	0	0
$\frac{-1-j\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	0	0	0	0	0	0
$\frac{1+j\sqrt{3}}{\sqrt{20}}$	0	$\frac{4}{\sqrt{20}}$	$5\,\frac{1+j\sqrt{3}}{\sqrt{20}}$	0	$\sqrt{20}$	0	0	5
$\underline{U}^*$			$\underline{U}^* \cdot \underline{A}$			$\underline{U}^* \cdot \underline{A} \cdot \underline{U} = \underline{\Lambda}$		

Die Diagonalmatrix $\underline{\Lambda}$ enthält in der Hauptdiagonalen die drei λ-Werte.

* **Aufgabe 6.14**: Stellen Sie auf möglichst einfache Weise fest, ob folgende Matrizen diagonalähnlich und die Eigenwerte reell

oder komplex sind!

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 1 & 2+3j \\ 2-3j & 3 \end{bmatrix}$;

d) $\begin{bmatrix} -5 & -1 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$; e) $\begin{bmatrix} 1 & -4 & -2j & 2j \\ -4 & 0 & j & -5j \\ 2j & -j & -2 & 1 \\ -2j & 5j & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

* Aufgabe 6.15: Geben Sie die Größen a_{kl} bzw. b_{rs} so an, daß die Eigenwerte λ der Matrix

a) $\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2-j & j \\ a_{21} & -3 & 3 \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{bmatrix}$; b) $\underline{B} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 & 0 \\ b_{21} & 0 & j & 2 \\ b_{31} & b_{32} & 0 & 1+j \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & 0 \end{bmatrix}$

reell werden!

6.7. Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren

Entsprechend Satz 6.15 gehören zu einem s-fachen Eigenwert λ_k bei Vorliegen einer hermiteschen Matrix immer s linear unabhängige Eigenvektoren. In Beispiel 6.17 waren dies die beiden Vektoren $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$ zum zweifachen Eigenwert $\lambda = 0$. Diese Eigenvektoren waren bereits unitär, in der Regel aber ist das nicht der Fall. Da aber für die unitäre Hauptachsentransformation unitäre Eigenvektoren benötigt werden, ist es notwendig, das System der linear unabhängigen, aber nicht unitären Eigenvektoren durch ein System unitärer Eigenvektoren zu ersetzen.
Zur Erläuterung dient Bild 6.8.

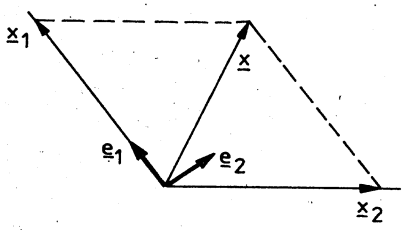


Bild 6.8

Die beiden (nicht unitären) Eigenvektoren $\underline{x}_1$ und $\underline{x}_2$ spannen eine Ebene, den Eigenraum, auf. Jeder Vektor dieses Eigenraumes läßt sich als Linearkombination der

beiden Eigenvektoren $\underline{x}_1$ und $\underline{x}_2$ mit geeignet gewählten Faktoren α_1, α_2 darstellen:

$$\underline{x} = \alpha_1 \underline{x}_1 + \alpha_2 \underline{x}_2 \,. \tag{6.88}$$

Jeder so berechnete Vektor ist dann ebenfalls Eigenvektor der vorgelegten Matrix $\underline{A}$, d. h., er löst die Gleichung $\underline{A} \cdot \underline{x} = \lambda \underline{x}$ für den hier zur Diskussion stehenden mehrfachen Eigenwert λ .

Beweis: Voraussetzung: Es gilt $\underline{A} \cdot \underline{x}_1 = \lambda \underline{x}_1$ und $\underline{A} \cdot \underline{x}_2 = \lambda \underline{x}_2$. Dann folgt

$$\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{A} (\alpha_1 \underline{x}_1 + \alpha_2 \underline{x}_2) = \alpha_1 \underline{A} \cdot \underline{x}_1 + \alpha_2 \underline{A} \cdot \underline{x}_2$$

$$= \alpha_1 \lambda \underline{x}_1 + \alpha_2 \lambda \underline{x}_2 = \lambda (\alpha_1 \underline{x}_1 + \alpha_2 \underline{x}_2) = \lambda \underline{x}.$$

Der Anfang und das Ende dieser Gleichungskette zeigen, daß $\underline{x}$ also auch Eigenvektor zum Eigenwert λ ist. ■

Man kann nun die Eigenvektoren $\underline{x}_1$ und $\underline{x}_2$ durch zwei unitäre Vektoren $\underline{e}_1$ und $\underline{e}_2$ ersetzen, die dann gleichzeitig noch normiert sind (daher $\underline{e}_{1,2}$). Dann ist jeder Eigenvektor $\underline{x}$ durch

$$\underline{x} = \varepsilon_1 \underline{e}_1 + \varepsilon_2 \underline{e}_2$$

bei geeigneter Wahl von ε_1, ε_2 gegeben.

Das Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren gibt an, wie man aus der nicht unitären Basis $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_s$ zum s-fachen Eigenwert das den gleichen Eigenraum aufspannende unitäre Vektorsystem $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_s$ berechnen kann:

a) Der Vektor $\underline{x}_1$ wird normiert (vgl. Bild 6.8):

$$\underline{e}_1 = \frac{\underline{x}_1}{|\underline{x}_1|} \,. \tag{6.89}$$

Statt mit dem Vektor $\underline{x}_1$ kann das Orthogonalisierungsverfahren aber auch mit einem beliebigen anderen Vektor des Eigenraumes begonnen werden, z. B. auch mit $\underline{x}_2$.

b) Für den Vektor $\underline{e}_2$ wählen wir dann den Ansatz entsprechend (6.88) und (6.89):

$$\underline{e}_2 = \frac{\underline{x}_2 + \beta \underline{e}_1}{|\underline{x}_2 + \beta \underline{e}_1|} \,. \tag{6.90}$$

In diesem Ansatz ist β derart anzugeben, daß $\underline{e}_1^* \cdot \underline{e}_2 = 0$ gilt (unitäre Vektoren); daher folgt für den Zähler der letzten Gleichung

$$0 = \underline{e}_1^* \cdot \underline{x}_2 + \beta\, \underline{e}_1^* \cdot \underline{e}_1 \Longrightarrow \beta = -\underline{e}_1^* \cdot \underline{x}_2 \,.$$

So ergibt sich für $\underline{e}_2$ aus (6.90)

$$\underline{e}_2 = \frac{\underline{x}_2 - \underline{e}_1^* \cdot \underline{x}_2 \cdot \underline{e}_1}{|\underline{x}_2 - \underline{e}_1^* \cdot \underline{x}_2 \cdot \underline{e}_1|} \,. \tag{6.91}$$

c) Für einen dreidimensionalen Eigenraum erhält man den dritten unitären normierten Eigenvektor durch den Ansatz

$$\underline{e}_3 = \frac{\underline{x}_3 + \beta_1\, \underline{e}_1 + \beta_2\, \underline{e}_2}{|\underline{x}_3 + \beta_1\, \underline{e}_1 + \beta_2\, \underline{e}_2|} \,. \tag{6.92}$$

Die Forderungen $\underline{e}_1^* \cdot \underline{e}_3 = 0$ und $\underline{e}_2^* \cdot \underline{e}_3 = 0$ führen unter Beachtung der bereits gültigen Gleichung $\underline{e}_1^* \cdot \underline{e}_2 = 0$ auf

$$\beta_1 = -\underline{e}_1^* \cdot \underline{e}_3 \,, \quad \beta_2 = -\underline{e}_2^* \cdot \underline{e}_3 \,,$$

so daß (6.92) in den folgenden Ausdruck übergeht:

$$\underline{e}_3 = \frac{\underline{x}_3 - \underline{e}_1^* \cdot \underline{e}_3 \cdot \underline{e}_1 - \underline{e}_2^* \cdot \underline{e}_3 \cdot \underline{e}_2}{|\underline{x}_3 - \underline{e}_1^* \cdot \underline{e}_3 \cdot \underline{e}_1 - \underline{e}_2^* \cdot \underline{e}_3 \cdot \underline{e}_2|} \,. \tag{6.93}$$

In diesem Sinne ist weiter zu verfahren, wenn eine unitäre Basis für Eigenräume höherer Dimension als 3 benötigt wird.

Beispiel 6.18: Die symmetrische Matrix

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -8 & 2\sqrt{3} & -6 \\ 2\sqrt{3} & 3 & \sqrt{3} \\ -6 & \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$$

führt zu der charakteristischen Gleichung

$$\det \begin{bmatrix} -8-\lambda & 2\sqrt{3} & -6 \\ 2\sqrt{3} & 3-\lambda & \sqrt{3} \\ -6 & \sqrt{3} & 1-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 - 4\,\lambda^2 + 80\,\lambda - 192 = 0 \,,$$

welche die Lösungen $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = -12$ besitzt. Zur doppelten Lösung $\lambda = 4$ ergibt sich der durch folgende Eigenvektoren beschriebene Eigenraum:

	x_1	x_2	x_3	1
$2\sqrt{3}$ |	-12	$2\sqrt{3}$	-6	0
(*)	$2\sqrt{3}$	-1	$\sqrt{3}$	0
$\sqrt{3}$ |	-6	$\sqrt{3}$	-3	0
	0	0	0	0
	0	0	0	0

$$\Longrightarrow \quad x_1 = s,\ x_3 = t,\quad x_2 = 2\sqrt{3}\,s + \sqrt{3}\,t\ .$$

Die Wahl von $s = 0$, $t = 1$ bzw. $s = 1$, $t = 0$ liefert

$$\underline{x}_1 = [0 \quad \sqrt{3} \quad 1]^T; \quad \underline{x}_2 = [1 \quad 2\sqrt{3} \quad 0]^T\ .$$

Offenbar sind diese Eigenvektoren wegen $\underline{x}_1^T \cdot \underline{x}_2 = 6$ nicht orthogonal.

Das Verfahren von Schmidt liefert:

a) $$\underline{e}_1 = \frac{\underline{x}_1}{|\underline{x}_1|} = \frac{1}{2}[0 \quad \sqrt{3} \quad 1]^T\ . \qquad (6.94)$$

b) Zur Ermittlung von $\underline{e}_2$ berechnen wir das für (6.91) offenbar benötigte Skalarprodukt

$$\underline{e}_1^T \cdot \underline{x}_2 = \frac{1}{2}[0 \quad \sqrt{3} \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2\sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix} = 3,$$

so daß sich der Zähler von (6.91) als

$$\underline{x}_2 - \underline{e}_1^T \cdot \underline{x}_2 \cdot \underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2\sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{3}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

ergibt.

Berücksichtigen wir noch den Betrag dieses im Zähler von (6.91) stehenden Vektors, so erhalten wir aus (6.91)

$$\underline{e}_2 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 \\ \sqrt{3} \\ -3 \end{bmatrix}\ . \qquad (6.95)$$

Durch Bildung des Skalarproduktes von $\underline{e}_1$ ((6.94)) mit $\underline{e}_2$ ((6.95)) kann man noch einmal die Orthogonalität dieser Vektoren kontrollieren.

Der dritte Eigenwert $\lambda = -12$ liefert ohnehin einen zu diesen

beiden Vektoren $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$ orthogonalen Vektor $\underline{e}_3$ (wegen Satz 6.13):

$$\underline{x}_3 = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}^T; \quad \underline{e}_3 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2\sqrt{3} & -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}^T .$$

Die orthogonale Transformationsmatrix U ergibt sich aus diesen drei orthogonalen Einheitsvektoren:

$$\underline{U} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \end{bmatrix} .$$

Die orthogonale Hauptachsentransformation führt erwartungsgemäß auf die Spektralmatrix $\underline{\Lambda}$:

			$\underline{A}$			$\underline{U}$		
			-8	$2\sqrt{3}$	-6	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
			$2\sqrt{3}$	3	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{1}{4}$
			-6	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$
0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$2\sqrt{3}$	2	4	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{3}{4}$	2	$\sqrt{3}$	-3	0	4	0
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$-6\sqrt{3}$	3	$-3\sqrt{3}$	0	0	-12
$\underline{U}^T$			$\underline{U}^T \cdot \underline{A}$			$\underline{U}^T \cdot \underline{A} \cdot \underline{U} = \underline{\Lambda}$		

Die Formeln (6.89), (6.91) und (6.93) zur Berechnung der orthogonalen Einheitsvektoren $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ aus den linear unabhängigen Vektoren $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$, $\underline{x}_3$ können mit Hilfe von Determinanten in die folgende merkfähige Form gebracht werden:

$$\underline{e}_k = \frac{\underline{d}_k}{\sqrt{G_k \, G_{k-1}}} . \qquad (6.96)$$

G_k ist die Gramsche Determinante k-ter Ordnung:

$$G_k = \begin{vmatrix} \underline{x}_1^* \cdot \underline{x}_1 & \underline{x}_1^* \cdot \underline{x}_2 & \cdots & \underline{x}_1^* \cdot \underline{x}_k \\ \underline{x}_2^* \cdot \underline{x}_1 & \underline{x}_2^* \cdot \underline{x}_2 & \cdots & \underline{x}_2^* \cdot \underline{x}_k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \underline{x}_k^* \cdot \underline{x}_1 & \underline{x}_k^* \cdot \underline{x}_2 & \cdots & \underline{x}_k^* \cdot \underline{x}_k \end{vmatrix}, \tag{6.97}$$

wobei $G_0 = 1$ definiert wird. Ferner ist

$$\underline{d}_k = \begin{vmatrix} \underline{x}_1^* \cdot \underline{x}_1 & \underline{x}_1^* \cdot \underline{x}_2 & \cdots & \underline{x}_1^* \cdot \underline{x}_k \\ \underline{x}_2^* \cdot \underline{x}_1 & \underline{x}_2^* \cdot \underline{x}_2 & \cdots & \underline{x}_2^* \cdot \underline{x}_k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \underline{x}_{k-1}^* \cdot \underline{x}_1 & \underline{x}_{k-1}^* \cdot \underline{x}_2 & \cdots & \underline{x}_{k-1}^* \cdot \underline{x}_k \\ \underline{x}_1 & \underline{x}_2 & \cdots & \underline{x}_k \end{vmatrix}, \tag{6.98}$$

wobei $\underline{d}_1 = \underline{x}_1$ definiert wird.

Wir wollen auf den Beweis verzichten und statt dessen die Einheitsvektoren $\underline{e}_1$ und $\underline{e}_2$ aus den gegebenen, linear unabhängigen, aber nicht orthogonalen Vektoren $\underline{x}_1$ und $\underline{x}_2$ mit Hilfe von (6.96) bis (6.98) berechnen:

a) $\underline{d}_1 = \underline{x}_1$; $G_1 = \underline{x}_1^* \cdot \underline{x}_1$; $G_0 = 1$;

$$\underline{e}_1 = \frac{\underline{d}_1}{\sqrt{G_1 \, G_0}} = \frac{\underline{x}_1}{\sqrt{\underline{x}_1^* \cdot \underline{x}_1}} = \frac{\underline{x}_1}{\sqrt{|\underline{x}_1|^2}} = \frac{\underline{x}_1}{|\underline{x}_1|} ;$$

b)
$$\underline{d}_2 = \begin{vmatrix} \underline{x}_1^* \cdot \underline{x}_1 & \underline{x}_1^* \cdot \underline{x}_2 \\ \underline{x}_1 & \underline{x}_2 \end{vmatrix} = \underline{x}_1^* \cdot \underline{x}_1 \cdot \underline{x}_2 - \underline{x}_1^* \cdot \underline{x}_2 \cdot \underline{x}_1 ;$$

$$G_2 = \begin{vmatrix} \underline{x}_1^* \cdot \underline{x}_1 & \underline{x}_1^* \cdot \underline{x}_2 \\ \underline{x}_2^* \cdot \underline{x}_1 & \underline{x}_2^* \cdot \underline{x}_2 \end{vmatrix} = |\underline{x}_1|^2 \, |\underline{x}_2|^2 - \underline{x}_1^* \cdot \underline{x}_2 \cdot \underline{x}_2^* \cdot \underline{x}_1 ;$$

$$G_1 = \underline{x}_1^* \cdot \underline{x}_1 = |\underline{x}_1|^2 ;$$

$$\underline{e}_2 = \frac{\underline{x}_2 \cdot |\underline{x}_1|^2 - \underline{x}_1^* \cdot \underline{x}_2 \cdot \underline{x}_1}{\sqrt{\left[|\underline{x}_1|^2 \cdot |\underline{x}_2|^2 - \underline{x}_1^* \cdot \underline{x}_2 \cdot \underline{x}_2^* \cdot \underline{x}_1\right] \cdot |\underline{x}_1|^2}}$$

$$= \frac{\underline{x}_2 - \underline{e}_1^* \cdot \underline{x}_2 \cdot \underline{e}_1}{\sqrt{|\underline{x}_2|^2 - \underline{e}_1^* \cdot \underline{x}_2 \cdot \underline{x}_2^* \cdot \underline{e}_1}} \; .$$

Dieser Ausdruck gleicht dem in (6.91) gegebenen.

* Aufgabe 6.16: Orthonormieren Sie das Vektorsystem

$$\underline{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ j \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \underline{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ j \end{bmatrix}; \quad x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ j \end{bmatrix},$$

indem Sie das Verfahren von Schmidt auf diese Vektoren
a) in der Reihenfolge $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3$,
b) in der Reihenfolge $\underline{x}_3, \underline{x}_2, \underline{x}_1$
anwenden.

* Aufgabe 6.17: Stellen Sie aus den Vektoren

$$\underline{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \underline{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \underline{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

mit Hilfe des Schmidt-Verfahrens unter Anwendung der Gramschen Determinanten eine orthonormierte Basis her!

Lösungen

A 6.1

a) $a = 1$; $\underline{e}_a = [j \quad 0 \quad 0]^T$;

b) $b = 2$; $\underline{e}_b = \frac{1}{2}[1 + j \quad 1 - j \quad 0]^T$;

c) $c = 3$; $\underline{e}_c = \left[\frac{j}{\sqrt{3}} \quad \frac{j}{\sqrt{3}} \quad \frac{j}{\sqrt{3}}\right]^T$;

d) $d = 3$; $\underline{e}_d = \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{j}{\sqrt{3}}\right]^T$.

A 6.2

a) $\underline{a}^* \cdot \underline{b} = 2j$; $\underline{b}^* \cdot \underline{a} = -2j$; b) $\underline{a}^* \cdot \underline{c} = \underline{c}^* \cdot \underline{a} = 0$ (unitär);

c) $\underline{d}^* \cdot \underline{e} = \underline{e}^* \cdot \underline{d} = 0$ (unitär); d) Skalarprodukt nicht bildbar!

A 6.3

a) $\det(\underline{A} - \lambda \underline{E}) = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 1) \Longrightarrow \lambda_1 = 1;$

$\lambda_{2,3} = 2 \pm \sqrt{3};$

b) $\det(\underline{A}^{-1} - \lambda' \underline{E}) = (1 - \lambda')(\lambda'^2 - 4\lambda' + 1) \Longrightarrow \lambda'_1 = 1;$

$\lambda'_{2,3} = 2 \mp \sqrt{3};$

c) Hier gilt: $2 - \sqrt{3} = \dfrac{1}{2 + \sqrt{3}}$, also $\lambda'_2 = \dfrac{1}{\lambda_2} = \lambda_3$.

Die Gültigkeit des letzten Gleichheitszeichens ist eine Besonderheit der vorgelegten Matrix.

A 6.4

a) $\det(\underline{A} - \lambda \underline{E}) = (1 - \lambda)(\lambda^2 + 1)$; $\lambda_1 = 1$; $\lambda_{2,3} = \pm j$;

b) $\det(\underline{A} - \lambda \underline{E}) = (2 - \lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + \frac{11}{3}) - \frac{2}{3}(2 - \lambda)$

$= (2 - \lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3) = 0$

(Entwicklung nach der 1. Spalte): $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 1$.

A 6.5

a) $\det(\underline{A} - \lambda \underline{E}) = -(2 + \lambda)(\lambda^2 - \lambda - 12) + 7(\lambda + 3)$

(Entwicklung nach der 1. Spalte)

$= (2 + \lambda)(\lambda - 4)(\lambda + 3) + 7(\lambda + 3)$

$= -(\lambda + 3)(\lambda^2 - 2\lambda - 15)$: $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -3$.

(zweifacher Eigenwert), $\lambda_3 = 5$.

b) $\det(\underline{A} - \lambda \underline{E}) = -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 = 0$; $\lambda_{1,2} = 1$ (zweifach),

$\lambda_3 = -1$.

A 6.6

$\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -1$; $\underline{x}_1 = t[-1 \quad 1]^T$; $\underline{x}_2 = t[2 \quad 3]^T$;

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(bis auf mögliche Vorzeichenabweichungen in den Spalten).

A 6.7

$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = -4$;

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 13 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 25 \end{bmatrix}$$

(bis auf mögliche abweichende Faktoren in den Spalten);

$$\det \underline{X} = \det \left[\underline{x}_1 \quad \underline{x}_2 \quad \underline{x}_3\right] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 13 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 25 \end{vmatrix} \neq 0 ,$$

lineare Unabhängigkeit (Satz 4.7, 3. Lehrbrief).

A 6.8

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} 0 & j & -j \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(bis auf abweichende Faktoren in den Spalten).

A 6.9

a) $\lambda_1 = \lambda_2 = 8,\ \lambda_3 = -8$.
Für $\lambda = 8$:

	x_1	x_2	x_3	1
$\sqrt{3}$ |	-3	$\sqrt{3}$	-6	0
(*)	$\sqrt{3}$	-1	$2\sqrt{3}$	0
$2\sqrt{3}$ |	-6	$2\sqrt{3}$	-12	0
	0	0	0	0
	0	0	0	0

$\Longrightarrow$ zwei linear unabhängige Eigenvektoren, daher insgesamt drei linear unabhängige Eigenvektoren $\Longrightarrow$ $\underline{A}$ diagonalähnlich.

b) Für $\lambda = 1$:

x_1	x_2	x_3	1
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	-2	0

$\Longrightarrow$ zwei linear unabhängige Eigenvektoren,

daher insgesamt drei linear unabhängige Eigenvektoren $\Longrightarrow$ $\underline{B}$ diagonalähnlich.

c) $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = -5$.

Für $\lambda = 3$:

	x_1	x_2	x_3	1
1|	-1	3	-2	0
(*)	1	-3	2	0
2|	-2	6	-4	0
	0	0	0	0
	0	0	0	0

$\Longrightarrow$ zwei linear unabhängige Eigenvektoren, daher insgesamt drei linear unabhängige Eigenvektoren $\Longrightarrow$ $\underline{C}$ diagonalähnlich.

d) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 5$.

Für $\lambda = 0$:

	x_1	x_2	x_3	1
(*)	1	1	-1	0
-8|	8	3	2	0
3|	-3	-2	1	0
5|	0	-5	10	0
(*)	0	1	-2	0
	0	0	0	0

$\Longrightarrow$ nur ein linear unabhängiger Eigenvektor, daher insgesamt nur zwei linear unabhängige Eigenvektoren $\Longrightarrow$ $\underline{D}$ nicht diagonalähnlich.

e) $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1 \Longrightarrow$ $\underline{F}$ diagonalähnlich.

A 6.10

a) $\underline{T}^{-1} \cdot \underline{A} \cdot \underline{T} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$;

b) $\underline{S}^{-1} \cdot \underline{B} \cdot \underline{S} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -6 & -1 \end{bmatrix}$.

Aufgabe 6.10b ist die inverse Ähnlichkeitstransformation zur Aufgabe 6.10a.

c) $\underline{T}^{-1} \cdot \underline{A} \cdot \underline{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$;

d) $\underline{S}^{-1} \cdot \underline{B} \cdot \underline{S} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 4 & -5 & 4 \\ -6 & 9 & 0 \end{bmatrix}$.

Aufgabe 6.10d ist die inverse Ähnlichkeitstransformation zur Aufgabe 6.10c.

A 6.11

a) $\underline{S}^{-1} \cdot \underline{A} \cdot \underline{S} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -3\,j \\ 3\,j & -1 \end{bmatrix}$; $\underline{T}^{-1} \cdot \underline{S}^{-1} \cdot \underline{A} \cdot \underline{S} \cdot \underline{T} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

b) Charakteristisches Polynom von $\underline{A}$:

$\left(-\frac{1}{2} - \lambda\right)^2 + \left(\frac{21}{2}\right)^2 - \frac{450}{4} = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 1$;

charakteristisches Polynom von $\underline{S}^{-1} \cdot \underline{A} \cdot \underline{S}$:

$\left(-\frac{1}{2} - \lambda\right)^2 - \frac{9}{4} = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 1$;

charakteristisches Polynom von $\underline{T}^{-1} \cdot \underline{S}^{-1} \cdot \underline{A} \cdot \underline{S} \cdot \underline{T}$:

$(-2 - \lambda)\,(1 - \lambda) = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = -2;\ \lambda_2 = 1$.

A 6.12

Aus $\underline{X}^{-1} \cdot \underline{A} \cdot \underline{X} = \underline{\Lambda}$ folgt $\underline{A} \cdot \underline{X} = \underline{X} \cdot \underline{\Lambda}$; nach Matrizenmultiplikation folgt:

a)
$$\underline{A} \cdot \underline{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ -3x_{11}+3x_{21}+5x_{31} & -3x_{12}+3x_{22}+5x_{32} & -3x_{13}+3x_{23}+5x_{33} \\ x_{11}-x_{21}-3x_{31} & x_{12}-x_{22}-3x_{32} & x_{13}-x_{23}-3x_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \underline{X} \cdot \underline{\Lambda} = \begin{bmatrix} x_{11} & 2x_{12} & -2x_{13} \\ x_{21} & 2x_{22} & -2x_{23} \\ x_{31} & 2x_{32} & -2x_{33} \end{bmatrix}.$$

Vergleichen der Matrizenelemente liefert drei Gleichungssysteme für je drei Variablen:

(I)	(II)	(III)
$0 \cdot x_{11} = 0$	$-x_{12} = 0$	$x_{13} = 0$
$-3x_{11}+2x_{21}+5x_{31} = 0$	$-3x_{12}+x_{22}+5x_{32} = 0$	$-3x_{13}+5x_{23}+5x_{33} = 0$
$x_{11} - x_{21} - 4x_{31} = 0$,	$x_{12}-x_{22}-5x_{32} = 0$,	$x_{13} - x_{23} - x_{33} = 0$.

Gleichungssysteme einzeln mit Gauß-Algorithmus lösen:

(I)

x_{11}	x_{21}	x_{31}	1
0	0	0	0
-3	2	5	0
1	-1	-4	0,

(II)

x_{12}	x_{22}	x_{32}	1
-1	0	0	0
-3	1	5	0
1	-1	-5	0,

(III)

x_{13}	x_{23}	x_{33}	1
1	0	0	0
-3	5	5	0
1	-1	-1	0 .

Daraus folgt:

(I) (II) (III)

$$\underline{x}_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -3 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \underline{x}_2 = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \underline{x}_3 = \begin{bmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Für $t = 1$ folgt:

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} \underline{x}_1 & \underline{x}_2 & \underline{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -7 & -5 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Ähnlich folgen aus $\underline{A} \cdot \underline{X} = \underline{X} \cdot \underline{\Lambda}$ die drei Gleichungssysteme

(I)

x_{11}	x_{21}	x_{31}	1
1	1	1	0
1	1	1	0
1	1	1	0,

(II)

x_{12}	x_{22}	x_{32}	1
1	1	1	0
1	1	1	0
1	1	1	0,

(III)

x_{13}	x_{23}	x_{33}	1
-2	1	1	0
1	-2	1	0
1	1	-2	0 .

(I) und (II) unterscheiden sich nur in der (willkürlichen) Bezeichnung der Variablen, daher braucht nur (I) gelöst zu werden.

(I):

$$\underline{x} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

zwei linear unabhängige Lösungen ergeben sich zu

$$\underline{x}_1 = [-1 \quad 1 \quad 0]^T, \quad \underline{x}_2 = [-1 \quad 0 \quad 1]^T.$$

(II) ergibt die gleichen (von $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$ linear abhängigen) Lösungen, da aber in $\underline{X} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]$ nur linear unabhängige Lösungen stehen dürfen (weil sonst $\det \underline{X} = 0$ wäre und somit sich $\underline{X}^{-1}$ nicht bilden ließe), braucht (II) nicht mehr gelöst zu

werden (vgl. Satz 6.7).
(III):

$$x_3 = \begin{bmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \underline{X} = \begin{bmatrix} \underline{x}_1 & \underline{x}_2 & \underline{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

c) Spektralmatrix: Modalmatrix:

$$\underline{\Lambda} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}; \qquad \underline{X} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Bemerkung: Die Übereinstimmung von $\underline{\Lambda}$ in dieser Lösung mit $\underline{\Lambda}$ in der Aufgabenstellung von Aufgabe 6.12b sowie von $\underline{X}$ in dieser Lösung mit $\underline{X}$ in der Lösung von Aufgabe 6.12b wird in Abschnitt 6.6.3. begründet.

A 6.13

a) $-\lambda^3 - \lambda^2 + 3\lambda + 27 = 0$; $\lambda_1 = 3$, $\lambda_{2,3} = -2 \pm j\sqrt{5} \Longrightarrow \underline{A}$ ist diagonalähnlich.

b) $-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 = 0$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = 2$ (zweifach) $\Longrightarrow$ für $\lambda = 2$ ist der Rang des Gleichungssystems $r = 2 \Longrightarrow n - r = 1 \Longrightarrow$ nur ein Eigenvektor $\Longrightarrow \underline{B}$ nicht diagonalähnlich.

c) $-\lambda^3 - \lambda^2 + 21\lambda + 45 = 0$; $\lambda_{1,2} = -3$ (zweifach), $\lambda_3 = 5 \Longrightarrow$ für $\lambda = -3$ ist der Rang des Gleichungssystems $r = 1 \Longrightarrow n - r = 2 \Longrightarrow$ zwei Eigenvektoren $\Longrightarrow \underline{C}$ diagonalähnlich.

d) $\lambda_{1,2} = \cos\varphi \pm \sin\varphi \Longrightarrow$ Matrix für $\varphi \neq n\pi$ $(n \in G)$ besitzt zwei verschiedene λ-Werte $\Longrightarrow \underline{D}$ diagonalähnlich.
Für $\varphi = 2k\pi$ $(k \in G)$ ist $\lambda_{1,2} = 1$ (zweifach). Gleichungssystem zur Berechnung der Eigenvektoren:

x_1	x_2	1
$1 - \lambda$	0	0
0	$1 - \lambda$	0 .

Für $\lambda = 1 \Longrightarrow r = 0$, $n - r = 2 - 0 = 2 \Longrightarrow$ zwei Eigenvektoren. Damit ist $\underline{D}$ diagonalähnlich; für $\varphi = (2k + 1)\cdot\pi$ $(k \in G)$ ebenso.

e) $(2-\lambda)(\lambda^2+1)=0$; $\lambda_1=2$, $\lambda_{2,3}=\pm j \Longrightarrow$ $\underline{H}$ diagonalähnlich.

f) $\lambda^3-4\lambda^2-10\lambda+4=0$; $\lambda_1=-2$, $\lambda_{2,3}=3\pm\sqrt{7} \Longrightarrow$ $\underline{F}$ ist diagonalähnlich.

A 6.14

a) $\lambda_1=4$, $\lambda_2=-1 \Longrightarrow$ diagonalähnlich;

b) Matrix symmetrisch $\Longrightarrow$ λ_k reell, Matrix diagonalähnlich;

c) Matrix hermitesch $\Longrightarrow$ λ_k reell, Matrix diagonalähnlich;

d) Matrix symmetrisch $\Longrightarrow$ λ_k reell, Matrix diagonalähnlich;

e) Matrix hermitesch $\Longrightarrow$ λ_k reell, Matrix diagonalähnlich.

A 6.15

a) $a_{21}=2+j$, $a_{31}=-j$, $a_{32}=3$;

b) $b_{21}=3$, $b_{31}=-1$, $b_{32}=-j$, $b_{41}=0$, $b_{42}=2$, $b_{43}=1-j$.

A 6.16

a)
$$\underline{e}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ j\\ 0\end{bmatrix},\quad \underline{e}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}j\\ 1\\ 2j\end{bmatrix},\quad \underline{e}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1-j\\ -1-j\\ -1+j\end{bmatrix};$$

b)
$$\underline{e}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ 0\\ j\end{bmatrix},\quad \underline{e}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-1\\ 2\\ j\end{bmatrix},\quad \underline{e}_1=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1+j\\ 1+j\\ 1-j\end{bmatrix}.$$

A 6.17

$G_0=1$; $G_1=2$; $G_2=3$; $G_3=4$,

$\underline{d}_1=\underline{x}_1$; $\underline{d}_2=-\underline{x}_1+2\underline{x}_2$; $\underline{d}_3=-\underline{x}_1-\underline{x}_2+3\underline{x}_3 \Longrightarrow$

$$\underline{e}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{bmatrix};\quad \underline{e}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 2\end{bmatrix};\quad \underline{e}_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 1\end{bmatrix}.$$

Notizen

Notizen

Notizen

Notizen